# Elementi di teoria della misura (incompleto)

Marco Sandri
Viale Rimembranza 2
37015 Sant'Ambrogio di Valpolicella
(Verona) - Italy
info@msandri.it
http://www.msandri.it/

26 Maggio 1993

# Capitolo 1

# Elementi di Teoria della Misura

## 1.1 Misure, spazi e funzioni misurabili.

### 1.1.1 $\sigma$-algebre.

**Definizione 1.1** *Una collezione $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme $X$ è una* **$\sigma$-algebra** *se gode delle seguenti proprietà :*

1. $X \in \mathcal{A}$*;*
2. *se* $A \in \mathcal{A}$ *allora* $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$*;*
3. *se, per una arbitraria successione (finita od infinita numerabile) di insiemi* $\{A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots\}$ *, è* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$*, cioè se* $\mathcal{A}$ *è chiusa rispetto all'unione arbitraria di suoi elementi.*

*Se $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra, allora $X$ (o meglio, la coppia ordinata $(X, \mathcal{A})$) si dice* **spazio misurabile** *e gli elementi di $\mathcal{A}$ si dicono* **insiemi misurabili** *in $X$.*

Se invece la classe $\mathcal{A}$ gode di tutte le succitate proprietà, ma non è in generale chiusa rispetto all'unione di un'infinità numerabile di suoi elementi, cioè se la proprietà 3 si limita a chiedere che per una arbitraria successione finita di insiemi $\{A_i \in \mathcal{A}; i = 1, 2, \ldots, n\}$ sia $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}$ viene detta *algebra*.

**Esempio 1.1** L'insieme $X$ può ad esempio essere l'insieme dei possibili risultati di un esperimento: i possibili esiti del lancio di un dado, dell'estrazione di una pallina da un'urna, di una roulette, ecc. $\mathcal{A}$ è allora la famiglia degli eventi, cioè la classe di sottoinsiemi di $X$ che contiene l'insieme $X$ stesso e che è chiusa rispetto all'operazione di complementazione e di unione. $\triangle$

Dalle proprietà 1, 2 e 3 della definizione si ricavano agevolmente i seguenti fatti:

1. poiché $\emptyset = X^c$, allora $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. data una sequenza $\{A_i \in \mathcal{A}; i = 1, 2, \ldots\}$, poiché:
$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c , \tag{1.1}$$
ne consegue $A \in \mathcal{A}$, cioè $\mathcal{A}$ è chiusa anche rispetto all'intersezione di un numero (finito od) infinito numerabile di suoi elementi;
3. dati $A, B \in \mathcal{A}$, la loro differenza appartiene ancora a $\mathcal{A}$, infatti:
$$A \setminus B = A \bigcap B^c \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

Il seguente risultato mostra che le $\sigma$-algebre esistono e sono molto 'numerose'.

**Teorema 1.1** *Se $\mathcal{F}$ è una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di $X$, allora esiste in $X$ una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}^*$ che è la più piccola delle $\sigma$-algebre contenenti $\mathcal{F}$ (i cui elementi sono cioè anche elementi di qualsiasi altra $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ contenente $\mathcal{F}$). $\mathcal{A}^*$ si dice $\sigma$-algebra generata da $\mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\Omega$ la famiglia di tutte la $\sigma$-algebre $\mathcal{A}$ in $X$ contenenti $\mathcal{F}$. Poiché l'insieme delle parti $\mathcal{P}$ di $X$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $X$, è una siffatta $\sigma$-algebra , $\Omega$ non è vuoto. Sia $\mathcal{A}^*$ l'intersezione di tutte le $\mathcal{A} \in \Omega$. Chiaramente $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^*$ ed inoltre $\mathcal{A}^*$ è contenuta in ogni $\sigma$-algebra contenente $\mathcal{F}$, cioé $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A} \in \Omega$. È necessario a questo punto dimostrare che $\mathcal{A}^*$ è una $\sigma$-algebra. Se $A_i \in \mathcal{A}^*$ per $i = 1, 2, \ldots$ e se $\mathcal{A} \in \Omega$, allora $A_i \in \mathcal{A}$ e $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$, poiché $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra; ciò è inoltre vero per ogni $\mathcal{A} \in \Omega$ e quindi $\bigcup_i A_i$ è un elemento comune a tutte le $\sigma$-algebre , cioè $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}^*$. Si è così dimostrata la proprietà 3 della definizione 1.1 di $\sigma$-algebra. In modo del tutto analogo si dimostrano 1 e 2. $\diamondsuit$

Ora, se $X$ è uno spazio topologico[(1)], per il teorema 1.1 esiste in $X$ una $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ (detta *$\sigma$-algebra di Borel*) che è la più piccola fra quelle che contengono gli insiemi aperti di $X$. Gli elementi di $\mathcal{B}$ si chiamano *insiemi di Borel* di $X$. In particolare gli insiemi chiusi di $X$ sono insiemi di Borel (essendo per definizione complementi di insiemi aperti), ed insiemi di Borel sono tutte le unioni numerabili di insiemi chiusi e le intersezioni numerabili di

[1]Sia $X$ un insieme non vuoto. Una classe $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $X$ è una topologia su $X$ se e soltanto se $\mathcal{T}$ soddisfa i seguenti assiomi:
a) $X$ e $\emptyset$ appartengono a $\mathcal{T}$;
b) qualunque unione (finita, numerabile o non numerabile) di elementi di $\mathcal{T}$ è ancora un elemento di $\mathcal{T}$, cioè data la collezione $\{V_\alpha\}$ di elementi di $\mathcal{T}$, $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \mathcal{T}$;
c) qualunque unione finita di elementi di $\mathcal{T}$ è ancora un elemento di $\mathcal{T}$; in altri termini, dati $V_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, è $\bigcup_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.
Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono *insiemi aperti*, e la coppia $(X, \mathcal{T})$ *spazio topologico.*

insiemi aperti. Questi ultimi due tipi di insiemi si indicano rispettivamente con i simboli $F_\sigma$ e $G_\delta$, e rivestono una notevole importanza nella teoria.

**Esempio 1.2** Ogni intervallo semiaperto $[a, b)$ è un $G_\delta$ ed un $F_\sigma$ in $\mathbb{R}$. Infatti:

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a, b - \frac{1}{n}].$$

$\triangle$

Poiché $\mathcal{B}$ è una $\sigma$-algebra, possiamo considerare $X$ come uno spazio misurabile ove gli insiemi di Borel hanno il ruolo di insiemi misurabili. Considereremo cioè lo spazio misurabile $(X, \mathcal{B})$.

### 1.1.2 Funzioni misurabili.

**Definizione 1.2** *Se $(X, \mathcal{A})$ è uno spazio misurabile, $(Y, \mathcal{T})$ uno spazio topologico ed $f$ un'applicazione di $X$ in $Y$, si dice che $f$ è* **misurabile** *quando $f^{-1}(T)$ è un insieme misurabile in $X$, cioè $f^{-1}(T) \in \mathcal{A}$, per ogni aperto $T \in \mathcal{T}$ di $Y$.*

In generale, così come le funzioni continue di funzioni continue sono continue, funzioni continue di funzioni misurabili sono misurabili:

**Teorema 1.2** *Siano $Y$ e $Z$ spazi topologici e sia $g : Y \to Z$ continua. Se $X$ è uno spazio misurabile e se $f : X \to Y$ è una funzione misurabile, posto $h = g \circ f$, $h : X \to Z$ è misurabile.*

*Dimostrazione.* Per la continuità di $g$, se $V$ è un aperto in $Z$, $g^{-1}(V)$ è aperto in $Y$. Inoltre, dall'ipotesi che $f$ è misurabile, segue che l'insieme:

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

è misurabile, e quindi $h : X \to Z$ è misurabile. $\diamondsuit$

Se $f : X \to Y$ è una applicazione continua di $X$ in $Y$, dove $Y$ è un qualunque spazio topologico, appare evidente che per ogni aperto $V$ in $Y$, $f^{-1}(V)$ è pure un aperto e quindi è un insieme misurabile appartenente alla $\sigma$-algebra di Borel $\mathcal{B}$. In altri termini, *ogni applicazione continua in $X$ è misurabile nel senso di Borel.* Se $Y$ è la retta (o il piano complesso), chiameremo le applicazioni misurabili di Borel *funzioni di Borel.*

**Teorema 1.3** *Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia una $\sigma$-algebra in $X$, $Y$ uno spazio topologico ed $f$ un'applicazione di $X$ in $Y$. Valgono i seguenti fatti:*

1. *se $\Omega$ è la collezione di tutti gli insiemi $E \subset Y$ tale che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, $\Omega$ è una $\sigma$-algebra in $Y$;*
2. *se $f$ è misurabile ed $E$ è un insieme di Borel in $Y$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$;*
3. *se $Y = [-\infty, \infty]$ e $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ per ogni numero reale $\alpha$, allora $f$ è misurabile.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare il punto (1) dobbiamo mostrare che $\Omega$ gode delle tre proprietà elencate nella definizione 1.1:
a) $Y \in \Omega$, infatti $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$;
b) se $E \in \Omega$, cioè $A = f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, allora $E^c \in \Omega$; infatti $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E) = A^c \in \mathcal{A}$;
c) se $\{E_i \in \Omega; i = 1, 2, \ldots\}$ è una succesione di elementi di $\Omega$, allora $\bigcup_i E_i \in \Omega$; infatti $f^{-1}(E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots) = f^{-1}(E_1) \bigcup f^{-1}(E_2) \bigcup \ldots \in \mathcal{A}$.
Per provare (2), definiamo $\Omega$ come in (1); la misurabilità di $f$ implica che $\Omega$ contiene tutti gli insiemi aperti in $Y$, ed essendo $\Omega$ una $\sigma$-algebra, $\Omega$ contiene tutti gli insiemi di Borel in $Y$.
Da ultimo, per dimostrare 3, poniamo $\Omega$ la collezione di tutti gli $E \subset [-\infty, \infty]$ tali che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Poiché $\Omega$ è una $\sigma$-algebra in $[-\infty, \infty]$, e $(\alpha, \infty] \in \Omega$ per ogni numero reale $\alpha$ (per Hp.), anche gli insiemi $[-\infty, \alpha)$ appartengono ad $\Omega$ per ogni $\alpha$. Essi infatti possono essere espressi come unione dei complementi dei segmenti $(\alpha, \infty]$:

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[-\infty, \alpha - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right]^c .$$

Inoltre:

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \bigcap (\alpha, \infty].$$

Quindi $\Omega$ contiene ogni insieme aperto in $[-\infty, \infty]$. $f$ è pertanto misurabile. $\diamondsuit$

### 1.1.3 Lim sup e lim inf di una successione di funzioni.

Apriamo qui una breve parentesi per presentare alcune nozioni che ricorreranno frequentemente nel seguito: il limite superiore ed inferiore di una successione, in particolare di una successione di funzioni.

**Definizione 1.3** *Sia $\{a_n\}$ una successione in $[-\infty, \infty]$. Poniamo:*

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

*Si definisce allora* **limite superiore** *della successione $\{a_n\}$ la quantità:*

$$\beta = \limsup_{n \to \infty} a_n = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}. \tag{1.4}$$

*Analogamente si definisce il* **limite inferiore***: è sufficiente scambiare sup ed inf nelle (1.3) e (1.4).*

È facile verificare che:
a) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$, cosicchè $b_k \to \beta$ per $k \to \infty$;
b) esiste inoltre una sottosuccessione $\{a_{n_i}\}$ di $\{a_n\}$, tale che $a_{n_i} \to \beta$ per $i \to \infty$, e $\beta$ è il più grande numero che gode di questa proprietà.
c) $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$;
d) se $\{a_n\}$ converge allora: $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Supponiamo ora che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni, a valori sulla retta reale estesa, definite su un insieme $X$. In tale ipotesi $\sup_n f_n$ e $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sono le funzioni definite su $X$ dalle:

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n(f_n(x)), \tag{1.5}$$

$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty}(f_n(x)). \tag{1.6}$$

Se:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{1.7}$$

nell'ipotesi che il limite esista per ogni $x \in X$, chiameremo $f$ *limite puntuale* della successione $\{f_n\}$.

Tornando al problema della misurabilità, vale il seguente risultato:

**Teorema 1.4** *Sia* $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ *una funzione misurabile per* $n = 1, 2, \ldots$. *Definiamo:*

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n, \qquad h = \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

*Le funzioni* $g$ *ed* $h$ *sono misurabili.*

*Dimostrazione.* Essendo:

$$g^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X | \sup_{n\geq 1} f(x) \in (\alpha, \infty]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty]),$$

per il punto 3 del teorema 1.3, $g$ è misurabile. Lo stesso risultato è valido se si sostituisce inf a sup. Inoltre, dato che $h = \inf_{k\geq 1}\{\sup_{i\geq k} f_i\}$, anche $h$ risulta misurabile. $\diamondsuit$

### 1.1.4 Funzioni semplici.

**Definizione 1.4** *Una* **funzione semplice** *è una funzione* $s : X \to Y$ *definita su di uno spazio misurabile* $X$*, il cui codominio è costituito da un numero finito di punti in* $[0, \infty)$*, cioè* $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$*,* $0 \leq \alpha_i < \infty$.

Se definiamo gli insiemi [2]:

$$A_i = \{x \in X | s(x) = \alpha_i\}, \tag{1.8}$$

allora ogni funzione semplice può essere sempre scritta come combinazione lineare di funzioni caratteristiche[3]

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \tag{1.9}$$

dove $\chi_{A_i}$ è la funzione caratteristica di $A_i$.

Appare evidente che $s$ è misurabile se e soltanto se ciascun $A_i$ è misurabile.

Va ricordato che, più in generale, si può definire 'funzione semplice' qualsiasi funzione che assuma un numero finito di valori. Per i nostri interessi ci limitiamo però a considerare solo quelle a valori in $[0, \infty)$.

**Teorema 1.5** *Sia $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile. Esistono funzioni misurabili semplici $s_n$ tali che:*

1. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$;
2. $s_n(x) \to f(x)$ *per* $n \to \infty$ *e per ogni* $x \in X$.

*Dimostrazione.* Per $n = 1, 2, \ldots$ e per $1 \leq i \leq n2^n$ poniamo per definizione:

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad F_n = f^{-1}([n, \infty]) \tag{1.10}$$

e

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x). \tag{1.11}$$

In base al punto 2 del teorema 1.3, si dimostra che $E_{n,i}$ ed $F_n$ sono insiemi misurabili quindi le $s_n$ sono misurabili. È poi facile verificare che le (1.11) godono della proprietà 1. Inoltre, se $x$ è tale per cui $f(x) < \infty$, risulta $s_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$ quando $n$ è abbastanza grande; se invece $f(x) = \infty$, è $s_n(x) = n$ e questo prova il punto 2. $\diamondsuit$

Quando $f$ è limitata, la dimostrazione di cui sopra fornisce una successione uniformemente convergente $\{s_n\}$.

[2] Gli insiemi definiti dalla (1.8) formano una partizione su $X$, cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

[3] Dato un insieme $A$, la funzione:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \notin A \end{cases}$$

è detta *funzione caratteristica* dell'insieme $A$.

### 1.1.5 Misure e spazi di misure.

**Definizione 1.5** *Una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definita su una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$, a valori reali positivi, è una* **misura** *positiva se è numerabilmente additiva, cioè se, data una collezione numerabile $\{A_i\}$ di elementi* [4] *di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti ($A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), è:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.12}$$

*La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$, cioè lo spazio $X$ dotato di una misura positiva $\mu$ definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ dei suoi insiemi misurabili, viene detta* **spazio di misura**.

Dalla definizione si possono subito ricavare alcune interessanti proprietà delle misure.

**Teorema 1.6** *Sia $\mu$ una misura positiva sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$. Risulta:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $C = A \setminus B \Rightarrow \mu(C) = \mu(A) - \mu(B)$, *per* $A, B \in \mathcal{A}$;
3. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, *per* $A, B \in \mathcal{A}$;
4. *se* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, *e*
$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots,$$
*allora* $\mu(A_i) \to \mu(A)$ *per* $i \to \infty$;
5. *se* $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_1)$ *è finito, e*
$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots,$$
*allora* $\mu(A_i) \to \mu(A)$ *per* $i \to \infty$;

*Dimostrazione.*
1) Questa proposizione si dimostra prendendo nella (1.12) un $A_1 \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A_1) < \infty$ e $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$. Ne segue:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \ldots,$$

e quindi deve essere $\mu(A_2) = \mu(A_3) = \ldots = 0$.
2) $C$ è prima di tutto misurabile, inoltre $A = B \bigcup C$ e $B \bigcap C = \emptyset$. Dalla proprietà di additività numerabile di $\mu$ segue quindi $\mu(A) = \mu(B \bigcup C) = \mu(B) + \mu(C)$, da cui la

[4] Supponiamo inoltre che, per almeno un elemento $A_i \in \mathcal{A}$, sia $\mu(A_i) < \infty$.

proposizione 2.
3) Si osserva che $B = A \bigcup (B \setminus A)$ e $A \bigcap (B \setminus A) = \emptyset$, quindi prendendo nella (1.12) $A_1 = A$, $A_2 = B \setminus A$, risulta:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

4) Si ponga $B_1 = A_1$ e $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ per $i = 2, 3, \ldots$. Ovviamente $B_i \in \mathcal{A}$, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$, $A_i = B_1 \bigcup \ldots \bigcup B_i$ e $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Quindi:

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{i} \mu(B_j) \qquad \text{e} \qquad \mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

In virtù della definizione di somma di una serie infinita, segue la 4.
5) Posto $C_i = A_1 \setminus A_i$, risulta $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$, $A_1 \setminus A = \bigcup_i C_i$ e, per la proprietà 2,

$$\mu(C_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i).$$

In virtù della 4 abbiamo:

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{i \to \infty} \mu(C_i) = \mu(A_1) - \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Ciò prova l'affermazione 5. $\diamondsuit$

**Esempio 1.3** Un primo semplice esempio di uno spazio di misura lo si ottiene considerando un qualsiasi insieme $X$, e ponendo per ogni $E \subset X$:

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{per } E \text{ finito} \\ \infty & \text{per } E \text{ infinito,} \end{cases}$$

dove $\#E$ indica la cardinalità dell'insieme $E$. La misura $\mu$ che così si ottiene è quella che si ha contando in $X$, per questo viene chiamata '*counting measure*'. $\triangle$

**Esempio 1.4** Per $x_0 \in X$ e per ogni $E \subset X$, si ponga:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Questa misura può essere chiamata la *massa unità* concentrata in $x_0$. $\triangle$

**Esempio 1.5** Se $X = \mathbb{R}$ (o $X = [0, 1]$), si è detto che la $\sigma$-algebra più 'naturale' è la $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ di Borel, che per definizione è la più piccola $\sigma$-algebra contenente gli intervalli. È possibile dimostrare che su questa $\sigma$-algebra esiste un'unica misura positiva, detta *misura di Borel*, tale che $\mu([a, b]) = b - a$. $\triangle$

A riguardo poi della proposizione 5, supponendo che $\mu$ sia la misura ottenuta contando nell'insieme $\{1, 2, 3, \ldots\}$ e $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$, risulta $A = \bigcap_i A_i = \emptyset$. Quindi $\mu(A) = 0$, mentre $\mu(A_i) = \infty$ per $i = 1, 2, \ldots$ Ciò dimostra che l'ipotesi $\mu(A_1) < \infty$ è tutt'altro che superflua nel teorema 1.6 (5).

La definizione 1.5 è estremamente generale. In gran parte delle applicazioni sono necessarie più specifiche nozioni di spazio misurabile. Ne consideriamo alcune.

**Definizione 1.6** *Uno spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è detto* **$\sigma$-finito** *se esiste una sequenza* $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{A}$, *che soddisfa:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{e} \qquad \mu(A_i) < \infty \quad \forall\, i.$$

**Esempio 1.6** Se $X = \mathbb{R}$ e $\mu$ è la misura di Borel, allora gli insiemi $A_i$ possono essere gli intervalli $[-i, i]$. Pertanto $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio $\sigma$-finito. Nello spazio $d$-dimensionale $\mathbb{R}^d$, gli $A_i$ possono invece essere le palle di raggio $r$. $\triangle$

**Definizione 1.7** *Uno spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è detto* **finito** *se* $\mu(X) < \infty$.

**Definizione 1.8** *Se* $\mu(X) = 1$, *lo spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è detto* **normalizzato** *o probabilistico.*

In questo modo si è stabilita una gerarchia di spazi di misura, dal più generale (def. 1.5) a quello più specifico (def. 1.8).

### 1.1.6 Spazi di probabilità.

Gli ingredienti fondamentali della teoria della probabilità sono in generale tre:

1. lo *spazio campionario*, un insieme $\Omega$ i cui elementi $\omega$ corrispondono ai possibili risultati di un esperimento;

2. la *famiglia di eventi*, una collezione $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi (eventi) $A_i$ di $\Omega$: diciamo che l'evento $A_i$ si verifica se il risultato $\omega$ dell'esperimento è un elemento di $A_i$;

3. la *misura di probabilità*, una funzione $P$ definità su $\mathcal{A}$ e dotata delle seguenti proprietà:

   (a)
   $$0 \leq P[\emptyset] \leq P[A_i] \leq P[\Omega] = 1 \qquad \forall\ A_i \in \mathcal{A};$$

   (b)
   $$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i], \tag{1.13}$$

   se gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ sono disgiunti, cioè se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Nel caso in cui $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ sia un insieme infinito numerabile di possibili risultati di un esperimento, possiamo prendere come famiglia di eventi l'insieme delle parti $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, cioè la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\Omega$. Se $p_1, p_2, \ldots$ sono numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, allora:

$$P[A] = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \tag{1.14}$$

definisce una misura di probabilità su $\mathcal{A}$.

Non è però sempre desiderabile, coerente o possibile assumere come famiglia di eventi la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\Omega$. In verità, quando $\Omega$ è un insieme infinito non numerabile, può risultare impossibile definire una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ mantenendo valida la proprietà (1.13). In qualsiasi maniera noi definiamo $\mathcal{A}$ di modo che valga la (1.13), questa famiglia di eventi deve sempre soddisfare le tre proprietà della definizione 1.1, cioè $\mathcal{A}$ deve essere una $\sigma$-algebra.

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è allora uno spazio di misura normalizzato, usualmente chiamato **spazio di probabilità** .

In questo contesto, una variabile casuale reale $f$ è una funzione a valori reali definita su $\Omega$ e soddisfacente certe condizioni di 'misurabilità' che andiamo qui a definire. La funzione di distribuzione della variabile casuale $f$ è data da:

$$Pr\{a < f \leq b\} = P[\{\omega | a < f(\omega) \leq b\}]. \tag{1.15}$$

La probabilità che la variabile casuale $f$ assuma un valore contenuto in $(a, b]$ è cioè definita come la probabilità dell'insieme di risultati $\omega$ in corrispondenza dei quali i valori assunti da $f$ cadano in $(a, b]$. Se si vuole che la relazione (1.15) abbia significato, $f$ non può essere una funzione arbitraria su $\Omega$, ma deve soddisfare la condizione che:

$$\{\omega | a < f(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\; a < b, \tag{1.16}$$

poiché $\mathcal{A}$ incorpora solamente gli insiemi $A$ per i quali $P[A]$ è definita. Di fatto, sfruttando le tre proprietà della definizione di $\sigma$-algebra, si osserva che è sufficiente richiedere:

$$\{\omega | f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

**Definizione 1.9** *Sia $\mathcal{A}$ una qualsiasi $\sigma$-algebra di sottoinsiemi di $\Omega$. Diremo che la variabile casuale $f$ è* **misurabile rispetto ad** $\mathcal{A}$*, o più sinteticamente $\mathcal{A}$-misurabile, se:*

$$\{\omega | f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Naturalmente vi possono essere più $\sigma$-algebre rispetto alle quali $f$ è misurabile. La $\sigma$-algebra *generata* da una variabile casuale $f$ è definita come la più piccola $\sigma$-algebra rispetto alla quale $f$ è misurabile. Viene solitamente indicata con $\mathcal{F}(f)$ e consiste di tutti quegli insiemi $A$ che appartengono ad ogni $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ rispetto alla quale $f$ è misurabile.

**Esempio 1.7** Se $f$ assume una infinità numerabile di valori $x_1, x_2, \ldots$, gli insiemi:

$$A_i = \{\omega | f(\omega) = x_i\} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

formano una partizione numerabile di $\Omega$, cioè sono insiemi a due a due disgiunti e la loro unione è $\Omega$.

In questo caso $\mathcal{F}(f)$ include $\emptyset$, $\Omega$ ed ogni insieme che sia esprimibile come unione di alcuni degli $A_i$. $\triangle$

**Esempio 1.8** Si esegua l'esperimento che consiste nel lanciare due monete $A$ e $B$ e nell'osservare quale faccia si presenta (Testa o Croce). Lo spazio campionario è :

$$\Omega = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\},$$

dove $(T,C)$ indica il risultato: (moneta A) = Testa e (moneta B) = Croce. Come famiglia di eventi prendiamo la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\Omega$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Assumendo che ogni risultato di $\Omega$ sia equiprobabile, arriviamo alla misura di probabilità definita in Fig. 1.1.

| $A \in \mathcal{A}$ | $P[A]$ | $A \in \mathcal{A}$ | $P[A]$ |
|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $0$ | $\Omega$ | $1$ |
| $\{(C,C)\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\{(C,T),(T,C),(T,T)\}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\{(C,T)\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\{(C,C),(T,C),(T,T)\}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\{(T,C)\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\{(C,C),(C,T),(T,T)\}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\{(T,T)\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\{(C,C),(C,T),(T,C)\}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\{(C,C),(C,T)\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\{(T,C),(T,T)\}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\{(C,C),(T,C)\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\{(C,T),(T,T)\}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\{(C,C),(T,T)\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\{(C,T),(T,C)\}$ | $\frac{1}{2}$ |

Figura 1.1: $\sigma$-algebra e misura di probabilità per l'esempio 1.8.

Sia $f_A : \Omega \to \{0,1\}$ una variabile casuale che assume valore 1 se la moneta $A$ vale testa e 0 se vale croce. Analogamente sia $f_B : \Omega \to \{0,1\}$ una variabile casuale che assume valore 1 se la moneta $B$ vale testa e 0 se vale croce. Poniamo $g = f_A + f_B$ il numero totale di teste.

Per finire, le $\sigma$-algebre generate da $f_A$ e da $g$ sono:

$$\mathcal{F}(f_A) = \{\emptyset, \Omega, \{(T,T),(T,C)\}, \{(C,T),(C,C)\}\},$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g) &= \{\emptyset, \Omega, \{(T,T)\}, \{(C,C)\}, \{(T,C),(C,T)\}, \{(T,T),(C,C)\},\\ &\quad \{(T,T),(T,C),(C,T)\}, \{(T,C),(C,T),(C,C)\}\}.\end{aligned}$$

| $\omega \in \Omega$ | $f_A(\omega)$ | $f_B(\omega)$ | $g(\omega)$ |
|---|---|---|---|
| $(T,T)$ | 1 | 1 | 2 |
| $(T,C)$ | 1 | 0 | 1 |
| $(C,T)$ | 0 | 1 | 1 |
| $(C,C)$ | 0 | 0 | 0 |

Figura 1.2: Variabili casuali $f_A$, $f_B$ e $g$ dell'esempio 1.8.

$\triangle$

**Definizione 1.10** *Si consideri uno spazio probabilistico* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ed una famiglia* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *di* $\sigma$*-algebre su* $\Omega$ *tale che:*

1. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *per ogni* $t \geq 0$*;*
2. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, se* $s \leq t$*.*

*Le proprietà 1 e 2 si esprimono dicendo che* $\mathbb{F}$ *è una famiglia crescente di sotto* $\sigma$*-algebre, cioè che* $\mathbb{F}$ *è una* **filtrazione** *di* $(\Omega, \mathcal{F})$*.*

Interpretando $\mathcal{F}_t$ come l'insieme di tutti gli eventi il cui verificarsi o non verificarsi sarà determinabile al tempo $t$, possiamo dire che $\mathbb{F}$, come elemento di un modello, descrive il flusso delle informazioni che giungono al trascorrere del tempo, cioè il modo in cui l'incertezza si risolve nel tempo.

Posta $\mathcal{F}_\infty$ la più piccola $\sigma$-algebra su $\Omega$ che contiene tutti gli eventi in $\mathcal{F}_t$, per tutti i $t \geq 0$, si può in generale assumere, senza una significativa perdita di generalità, che la $\sigma$-algebra ambiente $\mathcal{F}$ sia $\mathcal{F}_\infty$. Quindi, ogni qualvolta noi descriviamo $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ come uno **spazio di probabilità filtrato**, si intende che $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è uno spazio di probabilità, che $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ è una filtrazione di $(\Omega, \mathcal{F})$, e che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

## 1.2 Integrale di Lebesgue, Spazi $L^p$

### 1.2.1 Integrale di Lebesgue.

Dal teorema (1.5) sulle funzioni semplici abbiamo concluso che qualsiasi funzione misurabile a valori reali positivi può essere approssimata attraverso una combinazione lineare di funzioni caratteristiche. Questo fatto è cruciale per lo sviluppo della nozione che andiamo qui a definire.

**Definizione 1.11** *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura ed $s$ una funzione misurabile semplice su $X$ a valori in $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, che possiamo esprimere nella forma $s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$ (vedi def. 1.4). Sia $E \in \mathcal{A}$. Poniamo per definizione* [(5)]*:*

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E). \tag{1.19}$$

*Sia $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile, definiamo allora* **integrale di Lebesgue** *di $f$ su $E$ rispetto alla misura $\mu$ la quantità :*

$$\int_E f\, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s\, d\mu, \tag{1.20}$$

*dove l'estremo superiore è relativo a tutte le funzioni misurabili semplici $s$, tali che $0 \leq s \leq f$. Se $\int_E f\, d\mu$ è finito la $f$ si dice* **funzione integrabile**.

Evidentemente, per $f : X \to [0, \infty]$ l'integrale $\int_E f\, d\mu$ è sempre un numero reale positivo.

Prima di procedere ad enunciare tutta una serie di interessanti proprietà dell'integrale di Lebesgue, è opportuno considerare le seguenti proposizioni relative alle funzioni semplici.

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $s$ ed $r$ funzioni misurabili semplici ed $E \in \mathcal{A}$ un sottoinsieme misurabile di $X$.
a) $\int_E s\, d\mu \geq 0$;
ciò è evidente in quanto $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ (def. 1.4) e $\mu(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ (def. 1.5), quindi $\sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap E) \geq 0$;
b) se $s \leq r$ allora $\int_E s\, d\mu \leq \int_E r\, d\mu$;
dall'ipotesi:

$$s \leq r, \qquad \text{cioé} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

posto $C_{ij} = A_i \cap B_j$, segue che per ogni $x \in C_{ij}$ è $\alpha_i \leq \beta_j$, e quindi:

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j \alpha_i \mu(C_{ij} \cap E) &\leq \sum_i \sum_j \beta_j \mu(C_{ij} \cap E) \\
\sum_i \sum_j \alpha_i \mu(A_i \cap B_j \cap E) &\leq \sum_i \sum_j \beta_j \mu(A_i \cap B_j \cap E) \\
\sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap E) &\leq \sum_j \beta_j \mu(B_j \cap E),
\end{aligned}$$

che prova l'asserto;
c) se $A \subset B$, con $A, B \in \mathcal{A}$, allora $\int_A s\, d\mu \leq \int_B s\, d\mu$;
per il punto 3 del teorema 1.6 è evidente che:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B);$$

[5]Può accadere che sia $\alpha_i = 0$ e al contempo che $\mu(A_i \bigcap E) = \infty$. Adottiamo quindi la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

d) se $c \in [0, \infty]$ è una costante, risulta $\int_E c \cdot s \, d\mu = c \int_E s \, d\mu$;
infatti:
$$c \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_i (c\alpha_i) \mu(A_i \cap E) = \int_E c \cdot s \, d\mu.$$
e) $\int_E s \, d\mu + \int_E r \, d\mu = \int_E (r + s) \, d\mu$;
si ha:
$$r + s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i} + \sum_j \beta_j \chi_{B_j} = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$
e quindi:
$$\begin{aligned}
\int_E (r + s) \, d\mu &= \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j \cap E) = \\
&= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j \cap E) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j \cap E) = \\
&= \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap E) + \sum_j \beta_j \mu(B_j \cap E);
\end{aligned}$$
f) se $s$ è una funzione misurabile semplice su $X$, $E \in \mathcal{A}$ e:
$$\varphi(E) = \int_E s \, d\mu;$$
$\varphi(E)$ risulta essere una misura su $\mathcal{A}$;
infatti se $E_1, E_2, \ldots$ sono elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ la cui unione è $E$, l'additività numerabile di $\mu$ mostra che:
$$\begin{aligned}
\varphi(E) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(E_j);
\end{aligned}$$
inoltre $\varphi(\emptyset) = 0$, cosicchè $\varphi$ non è identicamente uguale a $\infty$.

Nei teoremi che ora ci accingiamo ad analizzare, la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è sempre intesa come spazio di misura.

**Teorema 1.7** *Se $f, g : X \to [0, \infty]$ sono funzioni integrabili, allora per $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ è integrabile e:*
$$\int_E (\lambda_1 f + \lambda_2 g) \, d\mu = \lambda_1 \int_E f \, d\mu + \lambda_2 \int_E g \, d\mu. \tag{1.21}$$

*Dimostrazione.* Per semplicità scindiamo la dimostrazione in due fasi.
*Passo 1.*

$$\begin{aligned}
\int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu &= \sup_{0\le s\le f}\int_E s\,d\mu + \sup_{0\le r\le g}\int_E r\,d\mu \\
&= \sup_{\substack{0\le s\le f\\ 0\le r\le g}}\left(\int_E s\,d\mu + \int_E r\,d\mu\right) \\
&= \sup_{0\le s+r\le f+g}\int_E (s+r)\,d\mu \\
&= \int_E (f+g)\,d\mu.
\end{aligned}$$

*Passo 2.*

$$\text{Se}\quad \lambda\ge 0\qquad \begin{aligned}
\lambda\int_E f\,d\mu &= \lambda\sup_{0\le s\le f}\int_E s\,d\mu = \sup_{0\le s\le f}\lambda\int_E s\,d\mu \\
&= \sup_{0\le \lambda s\le \lambda f}\int_E (\lambda s)\,d\mu \\
&= \int_E (\lambda f)\,d\mu
\end{aligned}$$

$$\text{Se}\quad \lambda< 0\qquad \begin{aligned}
\lambda\int_E f\,d\mu &= -\sup_{0\le s\le f}(-\lambda)\int_E s\,d\mu = -\sup_{0\le -\lambda s\le -\lambda f}\int_E (-\lambda s)\,d\mu \\
&= -\int_E (-\lambda f)\,d\mu
\end{aligned}$$

Tenendo conto che $\lambda<0$ ed applicando la (1.25), si vede che:

$$\int_E \lambda f\,d\mu = -\int_E -\lambda f\,d\mu,$$

e ciò conclude la dimostrazione. $\diamondsuit$

**Teorema 1.8** *Se $f : X \to [0,\infty]$ è una funzione misurabile e $A\subset B$, con $A, B\in\mathcal{A}$, si ha:*

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu, \tag{1.22}$$

*cioè l'integrale di Lebesgue è monotono.*

*Dimostrazione.* Detta $s$ una funzione misurabile semplice $0\le s\le f$, dalla proprietà f) segue immediatamente:

$$\int_B f\,d\mu = \sup\int_B s\,d\mu = \sup\left[\int_A s\,d\mu + \int_{B\setminus A} s\,d\mu\right] \ge \sup\int_A s\,d\mu = \int_A f\,d\mu.$$

$\diamondsuit$

**Teorema 1.9** *Se $f : X \to [0, \infty]$ è una funzione misurabile, risulta:*

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

*se e soltanto se $f = 0$ quasi ovunque su $E \in \mathcal{A}$.*

*Dimostrazione.* Anche in questo caso scindiamo la dimostrazione in due fasi: prima dimostriamo che $\int_E f \, d\mu = 0$ implica $f(x) = 0$ q.o. su $E$, e successivamente proviamo l'implicazione inversa.
*Passo 1.* Posto $A_n = \{x \in E | f(x) > \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, risulta $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset E$ e:

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{1}{n} \, d\mu \leq \int_{A_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu = 0.$$

Pertanto: $\mu(A_n) = 0$. Tenendo presente che $A = \bigcup_n A_n = \{x \in E | f(x) > 0\}$, segue dalla proprietà 4 del teorema 1.6: $\mu(A) = 0$, cioè $f(x) = 0$ quasi ovunque.
*Passo 2.* Se $s$, con $0 \leq s \leq f$, è una qualsiasi funzione misurabile semplice, anch'essa dovrà essere quasi ovunque nulla su $E$. Infatti detto $A$ l'insieme di misura nulla: $A = \{x \in E | f(x) > 0\}$, si ha che su $x \in A$ è $0 \leq s(x) \leq f(x)$, mentre su $x \in E \setminus A$ è $0 \leq s(x) \leq 0$. Definiti quindi gli insiemi:

$$A_1 = \{x \in X | s(x) = \alpha_1 = 0\} \qquad \text{e} \qquad A_i = \{x \in X | s(x) = \alpha_i > 0\} \qquad i = 2, \ldots n,$$

sarà $\mu(A_i \cap E) = 0$ per $i = 2, \ldots, n$ e $\mu(A_1 \cap E) > 0$. Di conseguenza:

$$\int_E s \, d\mu = 0 \cdot \mu(A_1 \cap E) + \alpha_2 \cdot \mu(A_2 \cap E) + \ldots + \alpha_n \cdot \mu(A_n \cap E) = 0$$

e $\int_E f \, d\mu = \sup \int_E s \, d\mu = 0$. $\diamondsuit$

Se definiamo le funzioni a valori reali positivi $f^+$ ed $f^-$ rispettivamente come la *parte positiva* e la *parte negativa* di $f$, cioè:

$$f^+ = \max\{f, 0\} \qquad \text{e} \qquad f^- = -\min\{f, 0\}, \tag{1.23}$$

risulta:

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{e} \qquad |f| = f^+ + f^-. \tag{1.24}$$

Possiamo allora estendere la nozione di integrale di Lebesgue ad una qualsiasi funzione misurabile a valori reali $f : X \to \mathbb{R}$. Sulla base del teorema 1.7, esso risulta infatti definito da:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \tag{1.25}$$

a condizione che almeno uno dei termini $\int_E f^+ \, d\mu$ e $\int_E f^- \, d\mu$ sia finito.

Se entrambi questi termini sono finiti la funzione $f$ è ancora una volta detta integrabile.

In molto molto semplice si può dimostrare che il teorema 1.7 è valido per ogni coppia $f$ e $g$ di funzioni integrabili a valori reali.

**Teorema 1.10** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile quasi ovunque positiva su $E \in \mathcal{A}$, è :*

$$\int_E f\,d\mu \geq 0.$$

*Dimostrazione.* Si è detto che $f = f^+ - f^-$. La parte negativa di $f$ è per ipotesi quasi ovunque nulla su $E$ e quindi:

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu \geq 0.$$

$\diamondsuit$

**Teorema 1.11** *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni misurabili tali che $f \geq g$ quasi ovunque su $E \in \mathcal{A}$, allora:*

$$\int_E f\,d\mu \geq \int_E g\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Infatti, poichè $f - g \geq 0$ quasi ovunque su $E$, dal teorema precedente segue immediatamente:

$$\int_E f\,d\mu - \int_E g\,d\mu = \int_E (f-g)\,d\mu \geq 0.$$

$\diamondsuit$

**Teorema 1.12** *Se $f, g : X \in \mathbb{R}$ sono funzioni misurabili, allora:*

$$\int_E |f+g|\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu. \tag{1.26}$$

*Dimostrazione.* Ricordando la disuguaglianza fondamentale sui valori assoluti: $|f+g| \leq |f| + |g|$, l'asserto segue in modo diretto dal teorema precedente. $\diamondsuit$

**Teorema 1.13** *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono funzione misurabili, $g$ è integrabile, e $|f| \leq g$ q.o. su $E \in \mathcal{A}$, allora:*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E g\,d\mu. \tag{1.27}$$

*Dimostrazione.* Ricordando la (1.24):

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| = \left|\int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu\right| \leq |\int_E f^+\,d\mu| + |\int_E f^-\,d\mu| = \int_E |f|\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu.$$

$\diamondsuit$

Da questo teorema si ricava un corollario interessante: se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, risulta:

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu. \tag{1.28}$$

Un risultato di particolare rilievo è il seguente teorema, noto come **teorema di Lebesgue sulla convergenza monotona**.

**Teorema 1.14** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $X$ e tali che:*
*a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$ per ogni $x \in X$;*
*b) $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e per ogni $x \in X$.*
*La funzione $f$ è allora misurabile e*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Poiché $\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu$, esiste un $\alpha \in [0,\infty]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \alpha. \tag{1.29}$$

Per il teorema 1.4 la funzione $f$ è misurabile. Inoltre, dato che $f_n \leq f$, risulta $\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$, per ogni $n$, cosicchè $\alpha \leq \int_X f\,d\mu$. Se $s$ è una funzione misurabile semplice tale che $0 \leq s \leq f$, e $c$ una costante $(0 < c < 1)$, poniamo per definizione:

$$E_n = \{x \in X | f_n(x) \geq c \cdot s(x)\} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.30}$$

Ciascun $E_n$ è misurabile, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, e $\bigcup_n E_n = X$. Infatti, se $f(x) = 0$, è $x \in E_1$; se $f(x) > 0$, è $c \cdot s(x) < f(x)$, poichè $c < 1$; di conseguenza $x \in E_n$ per qualche $n$. Inoltre

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq c\int_{E_n} s\,d\mu \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Facendo tendere $n$ all'infinito, e applicando la proposizione f) relativa alle funzioni semplici ed il teorema 1.6 (proposizione 4) all'ultimo integrale della doppia disuguaglianza sopra scritta, si ottiene $\alpha \geq c\int_X s\,d\mu$. Questa relazione vale per ogni $c < 1$ (quindi risulta $\alpha \geq \int_X s\,d\mu$) e vale per ogni $s$ misurabile che soddisfi la condizione $0 \leq s \leq f$, quindi:

$$\alpha \geq \int_X f\,d\mu. \tag{1.31}$$

Il teorema segue allora dalle (1.29), (1.30) e (1.31). $\diamondsuit$

Un'utile estensione del teorema 1.7 è contenuta nel seguente:

**Teorema 1.15** *Se* $f_n : X \to [0, \infty]$ *è misurabile (con* $n \in \mathbb{N}$*) e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in X,$$

*risulta:*

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Posto $g_N = f_1 + f_2 + \cdots + f_N$, chiaramente $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ e $g_N \to f$ per $N \to \infty$. La successione $\{g_N\}$ converge cioè monotonicamente ad $f$, e per il teorema 1.7 è $\int_X g_N \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu$. Applicando il teorema della convergenza monotona:

$$\lim_{N \to \infty} \int_X g_N \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

$\diamondsuit$

**Lemma 1.1** (Lemma di Fatou) Se $f_n : X \to [0, \infty]$ (con $n \in \mathbb{N}$) è misurabile, risulta:

$$\int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu. \tag{1.32}$$

*Dimostrazione.* Se poniamo $g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x)$, con $k \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, è $g_k \leq f_i$ per ogni $i \geq k$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi:

$$\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_i \, d\mu \qquad \forall \ i \geq k \ \text{ e } \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

cioè :

$$\int_X g_k \, d\mu \leq \inf_{i \geq k} \int_X f_i \, d\mu \qquad \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Inoltre $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$, $g_k$ è misurabile e $g_k(x) \to \liminf f_n(x)$ (si veda la definizione 1.3). Per il Teorema della convergenza monotona $\int_X g_k \, d\mu$ converge al primo membro della (1.32) per $k \to \infty$. Ecco allora che:

$$\lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, d\mu \leq \lim_{k \to \infty} \left( \inf_{i \geq k} \int_X f_i \, d\mu \right) = \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

$\diamondsuit$

**Teorema 1.16** *Sia* $f : X \to [0, \infty]$ *una funzione misurabile,* $E \in \mathcal{A}$*, e*

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu. \tag{1.33}$$

*La* $\varphi$ *è allora una misura su* $\mathcal{A}$*, e*

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X g \cdot f \, d\mu \tag{1.34}$$

*per ogni funzione* $g$ *misurabile su* $X$ *a valori in* $[0, \infty]$.

*Dimostrazione.* Siano $E_1, E_2, \ldots$ elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ la cui unione sia $E$. Si osserva che:

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f,$$

e che

$$\varphi(E) = \int_X \chi_E f \, d\mu, \qquad \varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f \, d\mu.$$

Segue dal teorema 1.15 che

$$\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j).$$

Poichè $\varphi(\emptyset) = 0$, la $\varphi$ è una misura.
Successivamente, la (1.33) mostra che la (1.34) vale ogni volta che $g = \chi_E$ per qualche $E \in \mathcal{A}$. Infatti: $\int_X \chi_E \, d\varphi = \int_E d\varphi = \varphi(E)$ e $\int_X \chi_E f \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \varphi(E)$. Essa vale quindi anche per ogni funzione misurabile semplice:

$$\begin{aligned} \int_X s \, d\varphi &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} f \, d\mu \\ \int_X s \cdot f \, d\mu &= \int_X (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} f) \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} f \, d\mu \end{aligned}$$

Il caso generale segue dal teorema della convergenza monotona. Per ogni funzione misurabile $g : X \to [0, \infty]$, esiste infatti una successione di funzioni misurabili elementari tale che:
a) $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \leq \infty$ per ogni $x \in X$;
b) $s_n(x) \to g(x)$ per $n \to \infty$ e per ogni $x \in X$.
Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\varphi = \int_X g \, d\varphi.$$

♢

Un ulteriore importante risultato, noto come **Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata**, è il seguente:

**Teorema 1.17** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $X$ tali che il limite:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

*esista per ogni $x \in X$. Se esiste una funzione integrabile $g$ tale che:*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall \, n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \, x \in X,$$

*$f$ è integrabile,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0, \tag{1.35}$$

*e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu. \tag{1.36}$$

*Dimostrazione.* Poiché $|f| \leq g$ ed $f$ è misurabile, $f$ è integrabile. Infatti $\int_X |f|\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu \leq \int_X |g|\, d\mu < \infty$. Essendo $|f_n - f| \leq 2g$, alle funzioni $2g - |f_n - f|$ si può applicare il lemma di Fatou, avendo di conseguenza:

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu = \\ &= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \Big( -\int_X |f_n - f|\, d\mu \Big) = \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu.\end{aligned}$$

Poichè $\int_X 2g\, d\mu$ è finito, possiamo sottrarlo da ambo i membri dell'uguaglianza precedente, ottenendo:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0.$$

Se una successione di numeri reali positivi non converge a zero, il suo limite superiore è positivo. La relazione qui scritta implica quindi la (1.35), e da quest'ultima, applicando a $f_n - f$ il corollario espresso nella relazione (1.28), si deduce la (1.36):

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \left| \int_X (f_n - f)\, d\mu \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \geq 0.$$

$\diamondsuit$