

La ricerca di dinamiche caotiche nelle serie storiche economiche: una rassegna

ROBERTO PERLI - MARCO SANDRI*

In questo lavoro analizziamo la metodologia standard utilizzata in diverse discipline per identificare la presenza di dinamiche caotiche nei dati reali. Il problema di fondo è che, in generale, le serie storiche sono generate da un processo dinamico non conosciuto, il quale può essere sia deterministico che stocastico. Noi qui presentiamo alcune tecniche (la ricostruzione dell'attrattore, la dimensione di correlazione, gli esponenti di Lyapunov, il test BDS) che possono essere utili nello stabilire se la serie storica sotto esame proviene da un processo del primo o del secondo tipo. Nel caso in cui la serie sia stata generata da un processo deterministico caotico, gli esponenti di Lyapunov forniscono una stima del 'grado di caoticità' (divergenza di traiettorie inizialmente vicine), mentre la dimensione di correlazione indica il numero di 'gradi di libertà' del sistema, cioè il minimo numero di equazioni differenziali o alle differenze che sono necessarie per modellizzare il sistema stesso. Presentiamo inoltre una rassegna di alcune applicazioni di queste tecniche alle serie storiche economiche.

In this paper we examine the standard methodology used in many disciplines to detect chaos in time series. The basic problem is that time series are generated by an unknown dynamic process, which may be either deterministic or stochastic. We present some techniques (reconstruction of attractors, correlation dimension, Lyapunov exponents, BDS test) that can be helpful in deciding whether the time series under scrutiny comes from the former or the latter kind of process. In the case the series has been generated by a deterministic chaotic process, Lyapunov exponents provide an estimate of the

* Department of Economics, New York University, 269 Mercer Street, New York NY 10003 USA e Istituto di Scienze Economiche, Università di Verona, Via dell'Artigliere 19, 37129 Verona, rispettivamente. Ringraziamo Alfredo Medio, Pier Luigi Sacco, Roberto Carniel, Federico Perali, Giovanni Tondini per molti utili commenti e suggerimenti dati durante la stesura del presente lavoro. Per le nostre simulazioni ci siamo avvalsi del programma DMC, sviluppato da Alfredo Medio e Giampaolo Gallo: ad essi va tutta la nostra riconoscenza.

'degree of chaoticity' (divergence of nearby starting trajectories) and correlation dimension provides an estimates of the number of degrees of freedom of the system, i.e. the minimum number of differential or difference equations needed to model the system itself. A survey of the known applications of these techniques to economic time series is also presented.

1. Introduzione

Accanto alla teoria matematica del caos e, più in generale, accanto alla teoria dei sistemi dinamici non lineari, la ricerca di evidenza empirica di dinamiche caotiche ha interessato in quest'ultimo decennio un numero crescente di campi della scienza, fra cui, in modo particolare, la fisica [Gollub, Romer e Socolar (1980), Swinney (1988) e molti altri] e la chimica [Roux (1983), Epstein (1983)], e poi anche la fisiologia [Babloyantz, Salazar e Nicolis (1985), Goldberger *et al.* (1985)], la climatologia [C.Nicolis e G.Nicolis (1984), Vautard e Ghil (1989)], la biologia [Olsen e Degn (1985)], l'epidemiologia [Grenfell (1992)] e, non da ultima, l'economia. A partire dal 1985, nella letteratura economica sono infatti apparsi numerosi lavori concentrati sulla delicata questione dell'individuazione di elementi, di 'sintomi' in grado di provare la presenza di caos deterministico e, più in generale, di strutture deterministiche non lineari nei dati reali.

Nonostante i forti problemi da esso sollevati e nonostante i risultati non univocamente interpretabili che, almeno per ora, è stato possibile ottenere, riteniamo importante far luce su un argomento ancora così poco conosciuto da economisti ed econometrici, ma assai stimolante e ricco di implicazioni per tutta la disciplina economica [Kelsey (1988), Baumol e Benhabib (1989), Brock (1990), Butler (1990), Medio (1990)]. In questo lavoro andremo per prima cosa ad analizzare (§2), seppur in modo estremamente conciso, gli elementi matematici di base che definiscono il contesto del nostro discorso: la nozione di sistema dinamico differenziabile non lineare, quella di attrattore e di attrattore strano. Passeremo poi a considerare l'insieme degli strumenti che vengono comunemente utilizzati nella ricerca di caos economico, cercando di evidenziare di volta in volta, accanto alla teoria che ne sta alla base, anche i criteri pratici di applicazione, le potenzialità ed i limiti intrinseci. Tratteremo così del metodo di ricostruzione dell'attrattore tramite la tecnica *time delay* (§3), del calcolo della dimensione di correlazione (§4) e degli esponenti di Lyapunov (§5), del test statistico BDS (§6). Successivamente (§7), prenderemo in rassegna buona parte dei lavori sinora apparsi, allo scopo di fornire un quadro più ampio e completo possibile della letteratura sull'argomento. Concluderemo con alcune considerazioni relative all'affidabilità ed al tipo di risultati raggiunti, unitamente ad una riflessione sui diversi

contributi che tale tipo di analisi può fornire alla conoscenza della realtà economica.

2. Sistemi dinamici caotici: alcune definizioni di base

In tutta l'analisi che seguirà noi ipotizzeremo di aver sempre a che fare con sistemi (ad es. un'economia, un mercato, ecc...) il cui stato in ogni istante t può essere descritto in modo completo da un vettore di n grandezze $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ fissato in partenza. Supporremo cioè che la funzione $x: R \rightarrow S \subseteq R^n$ sia in grado di indicarci istante dopo istante l'intera evoluzione del sistema, evoluzione la cui rappresentazione nello spazio di fase n -dimensionale S sarà, come vedremo, una linea od una sequenza di punti. In altre parole ci limiteremo a trattare sistemi dinamici a *dimensione finita*.

Oltre a ciò ci concentreremo, ed è questo un fatto di cruciale importanza, sui soli sistemi dinamici *deterministici* la cui evoluzione nel tempo è sempre completamente ed esclusivamente determinata dallo stato presente e dalla storia passata del sistema stesso. Questi sistemi solitamente si distinguono in *flussi e mappe* a seconda che essi vengano considerati nel tempo continuo o nel tempo discreto. Nel primo caso la legge che governa l'evoluzione del sistema è definita da un sistema di n equazioni differenziali ordinarie in cui il saggio di variazione temporale \dot{x} dello stato viene espresso in termini di x stesso¹, cioè:

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x} = F(x),$$

mentre nel secondo caso la legge di evoluzione è un sistema di n equazioni alle differenze in cui lo stato al tempo t è funzione di quello del periodo precedente²:

¹ Nella (2.1) la funzione F prende il nome di *vettore di campo* che genera il flusso $\phi(x, t)$, dove ϕ è a sua volta una funzione che soddisfa la (2.1) in un certo intervallo di tempo $\tau = (t_0, t_1)$ e per un dato insieme di stati $U \subseteq R^n$, cioè:

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, t))\Big|_{t=\tau} = F(\phi(x, t)) \quad \text{per tutti gli } x \in U$$

² Sia in (2.1) che in (2.2) vengono considerati i soli sistemi *autonomi* nei quali il tempo non compare esplicitamente come variabile. Ignoriamo perciò i sistemi del tipo:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad \text{e} \quad x_t = G(x_{t-1}, t).$$

$$(2.2) \quad x_t = G(x_{t-1}).$$

Le funzioni F e G saranno inoltre funzioni *non lineari* e le scritture F^t e G^t , dove t è il tempo (reale nel caso di F e intero nel caso di G), indicheranno i cosiddetti operatori di evoluzione temporale rispettivamente definiti da:

$$(2.3) \quad F^t(X) = \phi(x, t) \quad \text{e} \quad G^t(x) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{t \text{ volte}}(x).$$

Escludiamo poi dalla nostra indagine i sistemi *conservativi*³, noti anche come sistemi Hamiltoniani, i quali, dato un insieme di condizioni iniziali ciascuna rappresentante un possibile stato del sistema, hanno la proprietà di mantenere invariato il volume dello spazio di fase sotto l'azione della legge evolutiva (Teorema di Liouville). Noi andremo cioè a considerare soltanto i sistemi *dissipativi* i quali, al contrario, producono dinamiche che, in media, contraggono nel tempo il volume dello spazio di fase originario su di un insieme di dimensionalità inferiore. Chiameremo detto insieme *attrattore*⁴.

Pur non esistendo ancora una definizione universalmente accettata di questa nozione possiamo dire che un sottoinsieme A dello spazio di fase è un attrattore se:

i) A è invariante per F (o G), cioè se $F^t(A) \subset A$ per ogni $t \in R$; in altre parole, ogni traiettoria che parte da un qualsiasi punto appartenente a A , giace interamente in A ;

ii) esiste un intorno V di A che, allo scorrere del tempo, si contrae su A , cioè per ogni $x \in V$ è $F^t(x) \in V$ per tutti i $t > 0$ e $F^t(x) \rightarrow A$ per $t \rightarrow +\infty$;

iii) V non può essere decomposto in due sottoinsiemi invarianti disgiunti o, in altri termini, A è *topologicamente transitivo*, cioè per qualunque coppia di insiemi aperti $S, V \subset A$ esiste un numero $T > 0$ tale che $F^T(S) \cap V \neq \emptyset$.

Da un punto di vista applicativo, che è quello che poi a noi qui interessa, basterà ricordare che attrattore è quel sottoinsieme dello spazio delle fasi a cui convergono tutte le traiettorie del sistema poste nelle 'immediate vicinanze' (o meglio, entro il bacino di attrazione) di esso. L'attrattore è cioè l'insieme degli stati che sono effettivamente osservabili nel nostro sistema, la

³ Va ricordato però che anche dai sistemi Hamiltoniani possono emergere dinamiche complesse, del tutto simili a quelle caotiche dei sistemi dissipativi. Esse sono generalmente denominate 'stocastiche'. Sull'argomento si veda Lichtenberg e Lieberman (1983).

⁴ Con maggior precisione, un sistema è dissipativo se esiste un insieme aperto U nello spazio delle fasi il quale, in seguito all'evoluzione temporale, tende ad un insieme compatto A . Quest'ultimo viene denominato *insieme attrattivo* con insieme fondamentale U se gode delle proprietà i) e ii). L'insieme $U_{\leq 0} F^t(V)$ è denominato *bacino di attrazione* di A . Per un approfondimento si vedano Guckenheimer e Holmes (1983) e Medio e Gallo (1992).

descrizione del suo comportamento di lungo periodo. Alcuni esempi di attrattori semplici sono il punto fisso stabile, l'orbita periodica stabile, l'orbita quasiperiodica stabile⁵ che sono rappresentati in Fig. 1.

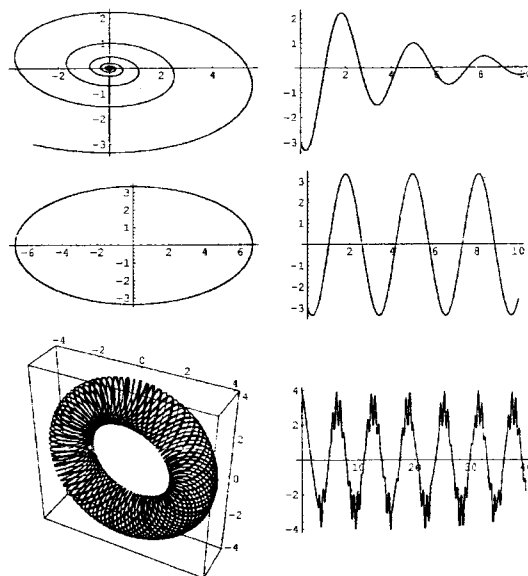


Fig. 1: Esempi di a) punto fisso, b) orbita periodica e c) quasiperiodica stabili.

Accanto a questi comportamenti esiste un quarto tipo di attrattore comunemente definito *strano* o *caotico* su cui è incentrato tutto il presente lavoro⁶. Le sue caratteristiche salienti si possono così riassumere:

i) l'evoluzione del sistema su di uno 'strange attractor' appare aperiodica, erratica, per molti aspetti simile a quella di un sistema stocastico e da essa spesso indistinguibile tramite gli strumenti statistici classici (analisi spettrale e di autocorrelazione), ma la cui origine è interamente determinata dalle leggi interne che governano il sistema e non da fattori casuali 'esogeni' (quali ad es. shocks sull'offerta, manovre di politica economica o fiscale, ecc...);

⁵ Quest'ultimo tipo di dinamica può essere generata modulando in qualche modo un segnale periodico con uno o più segnali anch'essi periodici ciascuno aventi una frequenza il cui rapporto con la frequenza del segnale di base è un numero irrazionale. Il movimento di un'orbita di questo tipo avviene su un toro k -dimensionale. Per dimensioni maggiori o uguali a tre questo comportamento risulta però in generale difficilmente osservabile [Newhouse, Ruelle e Takens (1978)].

⁶ Gli attrattori strani esistono sia per le mappe che per i flussi. È importante però notare che nei sistemi in tempo continuo gli attrattori caotici possono comparire soltanto per $n \geq 3$, dove n è il numero delle componenti del vettore di stato x .

ii) da un punto di vista geometrico, un attrattore strano presenta una struttura estremamente complessa che potremmo definire 'a fogli sovrapposti', non in contatto fra loro ma ad una distanza infinitesima l'uno dall'altro (la cui sezione coincide con un insieme di Cantor), struttura che non si dissolve con il mutare della scala alla quale l'oggetto viene osservato. Oggetti matematici di questo tipo vengono detti insiemi *frattali*⁷ (termine coniato intorno alla metà degli anni '70 dal matematico Benoît Mandelbrot) ed il loro grado di complessità a livello geometrico è espresso dalla dimensione di Hausdorff-Besicovitch⁸ o dimensione frattale;

iii) da un punto di vista dinamico, sulle traiettorie appartenenti ad un attrattore strano agiscono contemporaneamente due effetti: l'uno di *allungamento* ('stretching') e l'altro di *piegatura* ('folding'), un fenomeno del tutto simile all'azione compiuta da un fornaio mentre prepara, stirandolo e ripiegandolo più volte, l'impasto per il pane. Da un lato lo 'stretching' provoca l'espansione dello spazio delle fasi lungo una o più direzioni e dall'altro, dato che nei sistemi dissipativi il volume globale deve ridursi e le dinamiche devono rimanere confinate su una porzione limitata dello spazio

⁷ Questa parola deriva dall'aggettivo latino 'fractus' e dal verbo 'frangere' che richiamano l'idea di rompere, di spezzare in frammenti irregolari. Osservando un oggetto frattale (una linea costiera, una catena montuosa, un attrattore caotico, ecc...) ciò che infatti colpisce è il suo elevato grado di frammentazione, il quale permane man mano che la scala a cui lo si guarda si fa più fine. L'oggetto sembra il medesimo, qualunque sia la distanza di osservazione. Questa sorta di invarianza viene indicata con il termine di 'scaling'. Mandelbrot ha proposto di utilizzare detta proprietà come base per una definizione non rigorosa, anche se utile da un punto di vista operativo, di frattale: un insieme costituito di parti in qualche modo simili all'intero. Una seconda peculiarità di questi insiemi è quella che Mandelbrot (1982) chiama *discordanza dimensionale*: un oggetto frattale è un insieme la cui dimensione di Hausdorff-Besicovitch D è strettamente maggiore della dimensione topologica o Euclidea D_T . Questa seconda definizione, pur essendo più rigorosa, si rivela però eccessivamente restrittiva in quanto esclude molte utili forme frattali. Sull'argomento si veda Mandelbrot (1982) e Feder (1988).

⁸ Questa nozione non è facilmente interpretabile a livello intuitivo. Per il lettore interessato diciamo che, dato un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$, si chiama δ -ricoprimento di F una famiglia di sottoinsiemi non vuoti $\{U_i\}$ di \mathbb{R}^n i cui diametri $|U_i| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U_i\}$ non superano δ e tale che la loro unione 'copre' interamente F , cioè $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$. La misura s -dimensionale di Hausdorff di F si definisce allora:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } F \right\},$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutti i δ -ricoprimenti $\{u_i\}$ di F , e:

$$D = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}$$

è la dimensione di Hausdorff di F . Per una trattazione più ampia si veda Falconer (1985).

delle fasi, agisce l'effetto di 'folding' che ripiega su sé stesse le traiettorie. Questa duplice azione costituisce l'origine di una delle più importanti caratteristiche delle dinamiche caotiche: la *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* (SDIC). Due sistemi dinamici perfettamente identici che muovono da condizioni iniziali arbitrariamente vicine si evolvono lungo orbite che divergono ad un saggio esponenziale, diventando in breve tempo del tutto incorrelate. Ciò equivale a dire che i sistemi caotici, pur essendo deterministici, sono solo potenzialmente prevedibili in modo perfetto (sarebbe infatti necessario conoscere con infinita accuratezza non solo le leggi che governano il sistema, ma anche lo stato iniziale al tempo t_0), mentre da un punto di vista pratico ogni tentativo di previsione, soprattutto nel lungo periodo, è destinato in generale a fallire. L'errore di stima cresce infatti esponenzialmente al crescere del tempo e dell'errore commesso nella misurazione dello stato iniziale x_0 . Come avremo modo di vedere nel paragrafo 5, la presenza di SDIC viene rilevata attraverso il calcolo del più grande esponente di Lyapunov λ_1 che misura il tasso medio di divergenza locale delle traiettorie: un valore positivo indicherà la presenza di caos ed esprimerà in che misura l'errore commesso nella rilevazione dello stato iniziale si riflette sull'errore di previsione.

Ai fini pratici, ciò che si andrà a ricercare nei dati da analizzare è la presenza di caos deterministico di *bassa dimensione*, cioè di un attrattore caratterizzato da un esponente di Lyapunov positivo e da una dimensione non superiore a 10 [cfr. Brock, Hsieh e LeBaron (1991)], dato che, soprattutto in economia, non si dispone mai di dati in numero sufficiente da consentire la ricerca di caos di dimensionalità più elevata⁹.

In Fig. 2 consideriamo due esempi di sistema dinamico caotico, rispettivamente nel tempo continuo ed in quello discreto: il modello di Rössler e

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x+ay \quad \text{dove } a=0.398, b=2, c=4 \\ \dot{z} &= b+z(x+c) \end{aligned}$$

che è il più semplice sistema di equazioni differenziali in grado di esibire comportamenti caotici (vi è infatti un solo termine non lineare nella terza equazione), e la mappa di Henon

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= 1+y_t - ax_t^2 \\ y_{t+1} &= bx_t \end{aligned} \quad \text{dove } a=1.4, b=0.3$$

⁹ In questo lavoro quindi non faremo alcuna distinzione fra processo stocastico e caos di alta dimensione.

originariamente sviluppata per lo studio di alcuni problemi nel campo dell'astronomia.

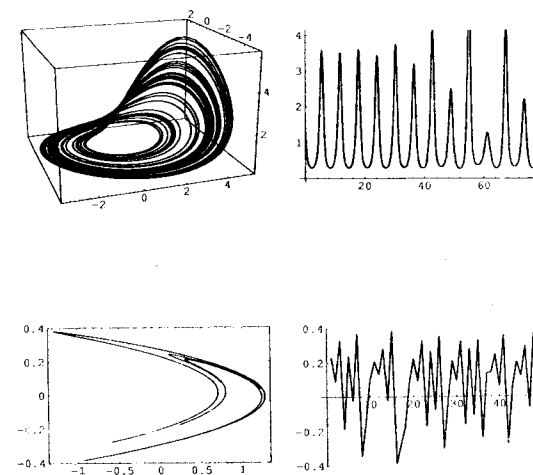


Fig. 2: Esempi di sistemi dinamici caotici: a) modello di Rössler e b) modello di Henon.

Dobbiamo poi tener presente che, nella quasi totalità dei casi, noi non disponiamo di rilevazioni dirette del vettore x che caratterizza lo stato del sistema, sia perché il numero delle sue componenti può risultare molto elevato, e quindi assai onerosa la sua misurazione, sia perché molto spesso la sua osservazione risulta tecnicamente impossibile. In generale disponiamo piuttosto di una sequenza di valori $\{y_t\}_{t=1}^N$, $y_t \in R$, che ad ogni istante costituiscono una sintesi dell'informazione contenuta nel vettore di stato x e che noi 'vediamo' come output del nostro strumento di misurazione, cioè $y_t = h(x_t)$, dove $h: R^n \rightarrow R$ è appunto la funzione di osservazione¹⁰.

Lo scopo che qui ci si prefigge è allora quello di accertare se le N misurazioni disponibili $\{y_t\}$ sono state generate da un processo di tipo stocastico, oppure da uno di tipo deterministico caotico di bassa dimensione (nel senso sopra precisato), oppure da una qualche 'miscela' dei due. In altre parole ci si propone di stabilire se e in quale misura la variabilità dei dati sotto osservazione è da imputare ad un meccanismo governato da leggi dinamiche deterministiche caratterizzate da un attrattore di tipo caotico e/o all'azione di forze puramente casuali.

¹⁰ Tipico è il caso dei mercati finanziari dove spesso risulta conveniente descrivere lo stato del sistema per mezzo di un numero (ad es. l'indice Mib, Comit, Dow Jones, ecc...) piuttosto che fare ricorso al vettore dei prezzi dei titoli costituito da centinaia di componenti.

Per concludere vanno ricordate due importanti ipotesi operative abitualmente adottate in questo tipo di analisi, anche se raramente poste nella dovuta evidenza:

i) nel caso in cui la serie sotto esame sia effettivamente il prodotto di un processo deterministico, si supporrà che essa si riferisca esclusivamente a dinamiche di equilibrio, cioè a traiettorie che si muovono interamente sull'attrattore, escludendo in tal modo ogni tipo di fenomeno transitorio (più o meno lungo) di avvicinamento all'attrattore;

ii) si escluderà inoltre che, durante tutto l'arco di tempo al quale i dati si riferiscono, siano intervenuti nel sistema cambiamenti strutturali di qualsiasi natura; ciò impone di considerare le misurazioni su di un orizzonte temporale sufficientemente ristretto, così da poter ritenere che in esso non si siano verificati eventi di rilevanza tale (ad es. il conflitto mondiale degli anni '40 o la crisi petrolifera degli anni '70) da provocare mutamenti delle leggi che regolano l'evoluzione del sistema.

Si potrebbe qui argomentare che, mentre la seconda ipotesi sembra poter essere in qualche modo ragionevolmente rispettata, la prima appare invece abbastanza lontana dalla realtà, soprattutto nei fenomeni di natura economica in cui la frequente azione di forze esogene (ad es. interventi del Governo sui tassi di interesse, manovre di politica fiscale e monetaria) allontana il sistema dall'equilibrio impedendogli di assestarsi su di un particolare attrattore. Tale circostanza significherebbe che si stanno impiegando tecniche di analisi tipicamente di equilibrio (anche se caotico) per indagare dinamiche generate da un sistema in disequilibrio. Può forse essere questa una delle ragioni della difficoltà incontrata nell'evidenziare in maniera convincente la presenza di caos nei dati economici.

3. La ricostruzione dell'attrattore

Da quanto detto nel paragrafo precedente, appare evidente che la prima fondamentale questione da affrontare è quella di stabilire se e in quale modo dalla serie di N misurazioni $\{y_t\}$ si possono estrarre indicazioni utili per caratterizzare le dinamiche del vettore di stato x e per stabilire la presenza di un eventuale attrattore nello spazio di fase.

Esiste a questo riguardo un importante teorema formulato da Takens (1981)¹¹. Esso afferma che, facendo uso della sola informazione contenuta in $\{y_t\}$, è possibile ricostruire, mediante una tecnica nota come metodo dei ritardi (o 'time delay'), un oggetto matematico immerso in uno pseudo-spazio di fase (detto spazio di ricostruzione o di 'embedding'), che è equivalente, in

¹¹ Una più approfondita trattazione dell'argomento si trova in Broomhead e King (1986). Interessanti estensioni sono presentate in Sauer, Yorke e Casdagli (1991).

un senso che chiariremo fra breve, all'attrattore del sistema dinamico che si sta studiando. Più precisamente, sotto le ipotesi che:

i) il sistema che si sta studiando si muova lungo una traiettoria la cui evoluzione è governata da una legge del tipo (2.1) o (2.2), dove F (o G) è una funzione liscia¹²;

ii) si disponga della serie delle osservazioni $\{y_t\}_{t=1}^N$ relativa agli stati $\{x_t\}_{t=1}^N$, dove $y_t = h(x_t)$ e dove $h(\cdot)$ è una funzione essa pure liscia;

iii) l'evoluzione dello stato x del sistema dinamico si trovi interamente sull'attrattore, cioè non appartenga ad un movimento transitorio di avvicinamento a A ;

iv) i vettori, detti *m-histories*, ottenuti considerando $N - m + 1$ successivi valori della serie $\{y_t\}_{t=1}^N$ con i rispettivi $m - 1$ valori antecedenti:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} y_N^m &= (y_N, y_{N-1}, \dots, y_{N-m+1}) \\ y_{N-1}^m &= (y_{N-1}, y_{N-2}, \dots, y_{N-m}) \\ &\vdots \\ y_m^m &= (y_m, y_{m-1}, \dots, y_1), \end{aligned}$$

siano vettori ad m componenti, con m (detta dimensione di embedding) maggiore od uguale a due volte la dimensione n dell'attrattore¹³ più uno, cioè $m \geq 2n + 1$;

il teorema di Takens stabilisce che il sottoinsieme di R^m costituito dalla sequenza di punti $\{y_t^m\}_{t=m}^N$, è una copia diffeomorfa¹⁴ dell'attrattore del sistema dinamico d'origine. Da un punto di vista pratico ciò significa che questi due oggetti hanno dinamiche di equilibrio qualitativamente equivalenti. Quindi, se il sistema sotto osservazione presenta dinamiche caotiche, queste sono allora presenti anche nell'attrattore ricostruito. In più, fatto di estrema importanza, i due attrattori possiedono la stessa dimensione di correlazione ed il medesimo spettro di esponenti di Lyapunov [cfr. Takens (1985) e Brock (1986)].

¹² Per funzione liscia intendiamo qui una funzione di classe C^∞ , cioè continua e dotata di derivate di ogni ordine continue.

¹³ Intendiamo qui indicare la sua dimensione topologica.

¹⁴ In altri termini, esiste una mappa $\Phi_{F,h}: S \rightarrow R^{2n+1}$ definita da:

$$\Phi_{F,h}(x) = (h(x), h(F(x)), \dots, h(F^{2n}(x)))$$

che è liscia e dotata di inversa, essa pure liscia.

Bisogna comunque dire che, non essendo la dimensione dell'attrattore nota a priori, la scelta di m è alquanto vaga e soggettiva. L'approccio generalmente seguito è quello di scegliere delle dimensioni di *embedding* via via crescenti, fino a quando, al di sopra di un certo valore di m , le traiettorie cessano di intersecarsi e l'oggetto ricostruito mostra sempre la medesima struttura. Chiaramente tale procedura diventa inapplicabile per alte dimensioni e in presenza di rumore. Per superare questa ambiguità, Liebert *et al.* (1991) e Kennel *et al.* (1992) hanno presentato alcuni interessanti criteri per la scelta della dimensione minima di embedding. Mentre il primo lavoro si basa su considerazioni di natura topologica, il secondo fa ricorso alla nozione di *falsi vicini*. L'idea è che, quando la dimensione di embedding risulta troppo piccola per ricostruire correttamente l'attrattore, molti punti risultano vicini fra loro non perché realmente tali in base alla dinamica che li ha generati, ma semplicemente perché si sta considerando la proiezione dell'attrattore su di uno spazio di dimensione minore. L'algoritmo va quindi a calcolare il numero dei punti la cui distanza da y_n^d ($n = d, d + 1, \dots, N$), nel passare dalla dimensione d a $d + 1$, cresce percentualmente più di un certo tasso fissato R_{tol} , e identifica il valore minimo di m con il valore della dimensione di embedding in corrispondenza del quale il numero di falsi vicini scende a 0.

4. La dimensione di correlazione

Dopo aver visto come possono essere ricostruite le traiettorie nello spazio di embedding, dobbiamo analizzare in che modo è possibile stabilire la presenza di un eventuale attrattore (e quindi di un sottostante sistema dinamico deterministico) e l'eventuale sua caoticità.

Uno dei primi passi da compiere è quello di determinare la dimensione dell'insieme su cui le traiettorie si dispongono, un attributo sicuramente significativo per la caratterizzazione di un qualsiasi oggetto geometrico. Nel nostro contesto essa assume poi una rilevanza particolare e rappresenta una sorta di condizione necessaria: solamente se le stime della dimensione dell'attrattore risultano convergere, al crescere di m , ad un valore non elevato (per i nostri scopi ≤ 10), i dati sotto osservazione possono essere il prodotto di un processo generatore (DGP d'ora in poi) deterministico caotico. Il valore trovato verrebbe in tal caso ad indicare il limite inferiore del numero delle variabili necessarie per la descrizione dell'evoluzione del sistema sull'attrattore¹⁵. Si tratta però di una condizione meramente necessaria: una

¹⁵ Vale la pena sottolineare che il numero delle variabili rilevanti per la descrizione di un determinato fenomeno economico è, in generale, infinito. Il fatto poi che l'evoluzione avvenga

bassa dimensione risulta essere consistente con molti altri processi che non sono né caotici né deterministici, quali ad es. i cosiddetti processi stocastici 'fractionally differenced' [cfr. Brock, Hsieh e LeBaron (1991), p. 29] e 'noise' filtrato [Rapp *et al.* (1991)].

I metodi per il calcolo della dimensione dell'attrattore sono numerosi e si rifanno a nozioni diverse [cfr. Farmer, Ott e Yorke (1983)]. Fra esse la più popolare nella teoria dei sistemi dinamici caotici e in particolare nelle indagini su dati economici, è la *dimensione di correlazione* proposta da Grassberger e Procaccia nel 1983, popolarità dovuta sia alla semplicità dell'algoritmo che alla relativa rapidità con cui può essere calcolata anche per grandi campioni. Essa risulta così definita: presa la serie delle m -histories $\{y_t^m\}_{t=m}^N$, si calcola la distanza fra ciascuna coppia di punti, cioè:

$$(4.1) \quad s_{ij}^m = \|y_i^m - y_j^m\| \quad \forall i, j = m, m+1, \dots, N; \quad i \neq j$$

dove $\|\cdot\|$ può essere sia la convenzionale distanza euclidea che una qualunque altra norma [cfr. Brock e Dechert (1987)], e si determina l'integrale di correlazione, definito come:

$$(4.2) \quad C_m(\varepsilon, N_m) = \frac{1}{N_m^2} \cdot \#\{(i, j) : m \leq i, j \leq N, s_{ij}^m < \varepsilon\}$$

dove $\#A$ denota la cardinalità A e $N_m = N - m + 1$. La grandezza $C_m(\varepsilon, N_m)$ indica la frazione di coppie di m -histories la cui distanza risulta inferiore ad ε e quindi è in grado di dare una espressione quantitativa del grado di correlazione 'spaziale', cioè nello spazio delle fasi, dei dati sotto esame¹⁶. Sotto deboli condizioni di stazionarietà ed ergodicità, il limite di $C_m(\varepsilon, N_m)$ al tendere di N ad infinito esiste sia per sistemi stocastici che deterministici, cioè:

su di un attrattore a poche dimensioni non significa che per la sua descrizione siano rilevanti soltanto alcune delle infinite variabili, quanto piuttosto che sono rilevanti poche combinazioni non lineari di tutte le infinite variabili.

¹⁶ $C_m(\varepsilon)$ può anche essere interpretata come una stima della probabilità che due m -histories si trovino ad una distanza inferiore a ε , cioè:

$$C_m(\varepsilon) \rightarrow \text{Prob}\{|y_{j+i}^m - y_{k+i}^m| < \varepsilon \quad \forall i = 0, 1, \dots, m-1\},$$

dove y_{j+i}^m e y_{k+i}^m sono le i -esime componenti dei vettori y_j^m e y_k^m .

$$(4.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} C_m(\varepsilon, N_m) = C_m(\varepsilon).$$

Se nei dati esiste un sottostante DGP deterministico si dimostra che, al crescere di m ($m \geq 2n+1$), $C_m(\varepsilon)$ converge e, per una classe abbastanza ampia di attrattori¹⁷ e per piccoli valori di ε , cresce secondo una legge esponenziale [cfr. Grassberger e Procaccia (1983)] del tipo: $C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^D$, dove D è la dimensione di correlazione. Pertanto:

$$(4.4) \quad D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln C_m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Se invece i dati sono identicamente ed indipendentemente distribuiti (IID d'ora in poi) si dimostra che:

$$(4.5) \quad C_m(\varepsilon) \approx [C_1(\varepsilon)]^m \quad \text{e quindi: } D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = m.$$

Dal punto di vista pratico la dimensione di correlazione viene stimata tracciando le curve di $\ln C_m(\varepsilon, N_m)$ in funzione di $\ln \varepsilon$ (il cosiddetto 'GP plot') per valori crescenti di m e per N sufficientemente grande¹⁸, e calcolandone poi la pendenza tramite una regressione lineare¹⁹. Va tenuto presente che non è però corretto calcolare tale pendenza su tutto l'intervallo di valori di ε di cui si dispone. Infatti, per valori molto ampi di ε , risulta $C_m(\varepsilon) \simeq 1$ dato che quasi tutte le coppie di m -histories distano fra loro meno di ε ; se invece nei dati è presente del rumore, per valori di ε piccoli rispetto alla varianza del rumore stesso, risulta $D = m$.

La pendenza delle curve deve quindi essere stimata per quei valori di ε in corrispondenza dei quali le curve appaiono sufficientemente lineari e stabili

¹⁷ In realtà per molti insiemi frattali l'integrale di correlazione si presenta nella forma $C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^D H(\varepsilon)$, dove $H(\varepsilon)$ è una funzione limitata ma che non tende ad alcuna costante per $\varepsilon \rightarrow 0$. Il comportamento oscillatorio di questa funzione viene chiamato *lacunarity*. Sull'argomento si veda Theiler (1988) e Smith (1991).

¹⁸ Si è dimostrato che il numero N di dati necessari per poter ottenere delle stime affidabili della dimensione di correlazione cresce esponenzialmente al crescere di D [Kostelich e Swinney (1989)]. Ai fini pratici però ciò sembra in molti casi una conclusione troppo pessimistica [cfr. Smith (1991)]. Il delicato problema del calcolo della dimensione D con piccoli insiemi di dati è stato analizzato da Ramsey e Yuan (1989) e da Ramsey, Sayers e Rothman (1990), i quali hanno evidenziato come, per piccoli valori di m , le stime siano in generale distorte verso l'alto.

¹⁹ Essendo infatti $C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^D$, risulta $\ln C_m(\varepsilon) = K + D \ln \varepsilon$ e quindi D coincide proprio con la pendenza del GP-plot.

al mutare di m . In genere si ricorre ad un secondo grafico in cui sono riportati i valori di²⁰:

$$(4.6) \quad SC_m(\varepsilon_i, N_m) = \frac{\ln[C_m(\varepsilon_i, N_m)] - \ln[C_m(\varepsilon_{i-1}, N_m)]}{\ln \varepsilon_i - \ln \varepsilon_{i-1}}$$

contro i valori di $\ln(\varepsilon_i)$, e si stima D soltanto entro quell'intervallo in cui detto grafico mostra una regione piatta ed indipendente da m (Fig. 3).

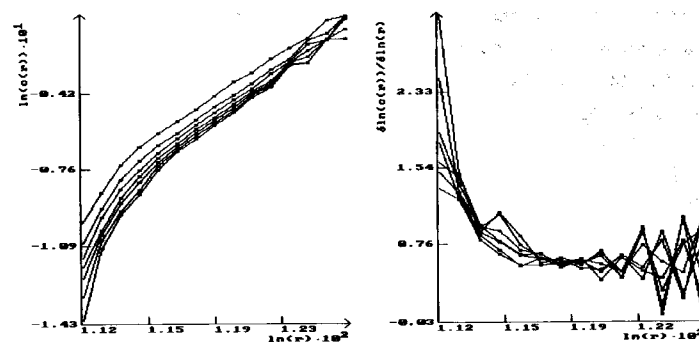


Fig. 3: Esempio di stima della dimensione di correlazione con il metodo di Grassberger-Procaccia.

Per quanto concerne la valutazione della significatività delle stime ottenute, va ricordato che non esiste allo stato attuale una adeguata teoria dell'inferenza statistica per la nozione di dimensione, anche se a tale riguardo sono disponibili alcune tecniche in grado di fornire utili indicazioni. Fra esse va ricordata la *shuffle diagnostic*, proposta da Scheinkman e LeBaron (1989a): a partire dalla serie originaria dei dati, viene generato, attraverso un rimescolamento casuale (con rimpiazzo), un certo numero di nuove serie i cui GP plot vengono posti a confronto con quello relativo ai dati di partenza. È naturale che, se in questi ultimi è presente una qualche struttura nascosta, il rimescolamento casuale ne determina la distruzione e fa sì che la dimensione di ogni nuova serie risulti sistematicamente non convergente ed in generale maggiore di quella d'origine.

²⁰ In alternativa Brock e Sayers (1986) propongono la stima:

$$\alpha_m(\varepsilon_i, N_m) = \frac{\ln[C_m(\varepsilon_i, N_m)]}{\ln \varepsilon_i}.$$

Alcuni altri interessanti stimatori, soprattutto per segnali caotici affetti da rumore, sono proposti in Smith (1992).

Come si è già ribadito, l'interpretazione dei risultati ottenuti deve essere condotta con estrema cautela. Se le stime di D risultano palesemente convergenti ad un valore non elevato, non si può affermare che il DGP è sicuramente deterministico con pochi gradi di libertà e tantomeno caotico. D'altro canto, se dai grafici non si riesce ad identificare una zona piatta, oppure se la stima di D non 'satura', non si può nemmeno concludere a favore dell'ipotesi di stocasticità del processo generatore: la situazione potrebbe essere dovuta ad una insufficiente numerosità del campione, oppure alla presenza di un sistema deterministico 'inquinato' da una forte dose di rumore, oppure ancora alla iniziale fase di trattamento dei dati (detrendizzazione, destagionalizzazione, differenziazione di primo ordine o altro tipo di filtraggio lineare stocastico) che può aver distrutto la struttura del DGP. Va qui infatti ricordata la delicata e controversa questione relativa agli effetti che i diversi trattamenti hanno sulle stime della dimensione di correlazione. Da un lato, alcuni risultati quali il *Residual Test Theorem*²¹ di Brock (1986), sembrano dimostrare l'invarianza di queste stime, mentre dall'altra numerosi esperimenti numerici pongono in evidenza che tali manipolazioni possono di fatto avere un peso assai rilevante (Chen, 1990).

La valutazione dei risultati ottenuti dalla stima della dimensione di correlazione con l'algoritmo di Grassberger e Procaccia deve quindi essere condotta con estrema circospezione. È in generale consigliabile integrare questa informazione con altri elementi indicatori della presenza di un possibile DGP deterministico non lineare. Nei prossimi paragrafi analizzeremo alcuni di questi.

5. I coefficienti di Lyapunov

Come detto nel paragrafo 2, se si ha a che fare con un fenomeno caotico, due traiettorie che partono da punti arbitrariamente vicini tra loro, dopo un certo periodo di tempo avranno un andamento completamente incorrelato; ciò avviene perché le traiettorie divergono tra loro ad un tasso esponenziale. In prima approssimazione si può dire che i coefficienti di Lyapunov positivi rappresentano una stima di questo tasso di divergenza locale.

Per definire i coefficienti di Lyapunov consideriamo un sistema dinamico continuo n -dimensionale ed un insieme di condizioni iniziali contenute in

²¹ In sintesi, esso stabilisce che, se $\{y_t\}_t^{\infty}$ ha una spiegazione deterministica 'smooth', e soddisfa alcune altre ipotesi, adattando ai dati un modello lineare con un numero finito di ritardi, cioè:

$$y_t + \gamma_1 y_{t-1} + \dots + \gamma_L y_{t-L} = \varepsilon_t \quad t = L+1, L+2, \dots$$

dove ε_t è il residuo non spiegato dal modello al tempo t e $\gamma_1, \dots, \gamma_L$ è l'insieme dei coefficienti stimati, allora, in generale, la dimensione di correlazione ed il più grande esponente caratteristico di Lyapunov di $\{y_t\}$ e di $\{\varepsilon_t\}$ coincidono.

un'ipersfera infinitesimale. Se stiamo studiando un sistema dissipativo, come abbiamo noi ipotizzato, il volume dell'ipersfera diminuisce nel tempo. In generale, è più corretto parlare di iperellissoide in quanto in taluni casi si può presentare una contrazione non necessariamente uniforme lungo tutte le direzioni, oppure una contrazione lungo alcune direzioni, espansione lungo altre (è questo caso il caso di un sistema caotico) e/o invarianza lungo altre ancora. Gli esponenti di Lyapunov sono in numero di n e sono legati proprio a questa espansione-contrazione degli assi principali dell'ellissoide n -dimensionale. Se si indica con $P_i(t)$ la lunghezza dell' i -esimo di questi al tempo t , l'espressione che definisce gli esponenti è:

$$(5.1) \quad \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{P_i(t)}{P_i(0)}$$

Si è notato [Wolf *et al.* (1985)] che la lunghezza dell' i -esimo asse varia in base alla legge $2^{\lambda_i t}$; l'area definita dagli assi i e j secondo $2^{(\lambda_i + \lambda_j)t}$, il volume definito dagli assi i, j, h secondo $2^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_h)t}$, ecc. Questa proprietà conduce ad un'altra possibile definizione dei coefficienti di Lyapunov: la somma di un numero k di essi rappresenta il tasso esponenziale di variazione del volume definito dagli assi corrispondenti. Ne consegue che per i sistemi dissipativi la somma di tutti gli esponenti deve essere negativa in quanto il volume si contrae ad ogni istante di tempo. Se si ha a che fare con un sistema la cui posizione di equilibrio è un punto fisso, tutti gli n esponenti saranno quindi negativi: la contrazione ha luogo lungo tutte le direzioni. Se la posizione di equilibrio è un ciclo limite (o un toro p -dimensionale), si avrà un esponente nullo (oppure p esponenti nulli) e tutti gli altri negativi: in questo caso infatti c'è una direzione (o p direzioni) lungo la quale non vi è né contrazione né espansione. Infine, se si hanno uno o più coefficienti positivi, si ha a che fare con un sistema caotico, in quanto lungo una o più direzioni avviene un'espansione.

Andiamo ora a presentare in dettaglio l'algoritmo più usato per calcolare da una serie di N osservazioni del sistema il più grande esponente di Lyapunov λ_1 : l'algoritmo di Wolf *et al.* (1985). Esso si basa sul teorema di Takens, il quale, come già detto, consente di ricostruire l'attrattore a partire da una sola serie storica, e sul fatto che l'attrattore ricostruito ha in generale lo stesso spettro di esponenti di Lyapunov di quello vero.

Questo metodo propone di seguire l'andamento nel tempo di due possibili traiettorie aventi punti iniziali arbitrariamente vicini. L'attrattore, anche se ricostruito a partire da una sola serie, e quindi da una sola traiettoria, può fornire ugualmente punti arbitrariamente vicini, che si possono considerare come appartenenti a traiettorie diverse, purché la loro separazione temporale

sia sufficientemente ampia. Nel seguito si definirà la traiettoria seguita dal punto di partenza *traiettoria di fiducia* e il punto scelto arbitrariamente vicino al primo si definirà *punto di riferimento*. Questi due punti formano l'asse principale dell'ellissoide, di cui si seguirà l'evoluzione nel tempo. In questo caso possono nascere problemi di overflow del calcolatore, per cui si può rendere necessario il ricorso ad una rinormalizzazione del vettore definito dai due punti risultanti dall'evoluzione nel tempo dei due punti scelti come iniziali. Ciò consiste nella sostituzione del punto di riferimento con uno più vicino alla traiettoria di fiducia, in modo che il nuovo vettore che si viene a formare abbia la medesima direzione del precedente. Poiché i punti a disposizione sono in numero finito, può accadere che un punto con questi requisiti non si trovi, per cui si dovrà scegliere un punto che dia luogo ad un vettore con l'inclinazione il più possibile vicina a quella del vettore che si vuole normalizzare, e comunque non superiore o inferiore ad essa per più di un valore specificato; se non viene trovato nessun punto con queste caratteristiche, si procede senza rinormalizzare il vettore fino a quando non sia possibile trovare un nuovo punto di riferimento. Con questa procedura, che di solito si attua ad intervalli di tempo costanti, è possibile seguire l'andamento nel tempo dell'asse principale dell'ellissoide, per cui si può ottenere una stima di λ_1 . Se si indicano con S il numero totale di volte che si è proceduto alla sostituzione del punto di riferimento, con $L(t_{k-1})$ la lunghezza del vettore al tempo t_{k-1} e con $L(t_k)$ la lunghezza del vettore sostituito al tempo t_k , una stima di λ_1 è data dall'espressione:

$$(5.2) \quad \lambda_1 = \frac{1}{t_S - t_0} \sum_{k=1}^S \log_2 \frac{L(t_k)}{L(t_{k-1})}$$

L'algoritmo sopra illustrato richiede la fissazione di molti parametri: la dimensione di *embedding*, il tempo tra due sostituzioni successive del punto di riferimento, una lunghezza massima per il vettore sostituito ed una lunghezza di scala minima, al di sotto della quale si ritiene che la dinamica sia dovuta soltanto, o in massima parte, al rumore; un errore nella specificazione di uno di questi parametri può portare ad una stima inattendibile di λ_1 .

In genere si osserva che scegliendo una dimensione di *embedding* inferiore a quella corretta, la stima di λ_1 non ne risente in modo particolare²². Al contrario, specificando un m troppo elevato, si possono ottenere stime piuttosto distorte, in quanto in tal modo non si fa altro che accentuare gli effetti del 'noise' eventualmente presente nei dati.

²² Wolf *et al.* (1985) notano che per una serie proveniente dal modello di Lorenz si ottengono stime molto buone anche specificando una dimensione di *embedding* m pari a tre o quattro, molto inferiore quindi al valore minimo di sette teoricamente richiesto dal teorema di Takens.

Problemi maggiori si hanno nella scelta dell'intervallo di sostituzione: se è troppo piccolo generalmente si ha una quasi immediata perdita dell'orientamento dell'asse principale nello spazio delle fasi, mentre se è troppo lungo possono sorgere problemi di overflow. Wolf *et al.* (1985) forniscono alcuni criteri per la determinazione del valore più adatto, criteri che purtroppo nelle applicazioni pratiche su dati reali sono di difficile applicabilità.

Per ciò che concerne il numero di dati necessari al calcolo di λ_1 , è chiaro che più sono numerosi, maggiore è la probabilità di trovare punti di rimpiazzo che preservino la direzione dell'asse, e migliore risulta la stima ottenuta. Inoltre, essendo per definizione un risultato asintotico, è necessario avere un numero di dati sufficientemente elevato affinché la stima converga al crescere di t_S . Il numero richiesto è quindi generalmente abbastanza alto (dell'ordine di alcune migliaia almeno) e comunque dipende dal tipo di attrattore che si sta trattando.

Da ultimo va ricordato che, quando la serie sotto indagine proviene da un processo stocastico o da un DGP deterministico con una forte 'dose' di rumore (dose che viene espressa tramite il cosiddetto 'signal to noise ratio'), si ottengono solitamente stime positive di λ_1 che però non mostrano il carattere della convergenza. Brock (1986) evidenzia una analoga situazione per le stime ottenute da serie poco numerose generate da processi IID e processi lineari stocastici (autoregressivi e a media mobile).

Operando su serie temporali reali, anche le stime di λ_1 ottenute con l'algoritmo qui considerato devono pertanto essere prese con estrema cautela, per non incorrere in facili errori di valutazione. Solamente se sono soddisfatte le seguenti tre regole empiriche, si potrà cioè ragionevolmente 'catalogare' la stima del massimo esponente di Lyapunov fra gli elementi che vanno a suffragio dell'ipotesi di un DGP deterministico caotico:

i) Le stime ottenute devono essere significativamente maggiori di 0 (purtroppo non è attualmente disponibile un metodo che permetta di stimare l'intervallo di confidenza);

ii) le stime devono essere convergenti;

iii) le stime devono essere sufficientemente stabili al variare dei parametri richiesti dall'algoritmo.

Un esempio di stima di esponente di Lyapunov dominante è riportato in Fig. 4: poichè la stima è sensibilmente diversa da zero, convergente e abbastanza stabile rispetto ai parametri, si può plausibilmente ritenere che la serie a cui essa si riferisce è stata generata da un fenomeno di tipo caotico.

Per completezza va detto che quello di Wolf *et al.* (1985) non è l'unico algoritmo che permette il calcolo dell'esponente λ_1 a partire da una serie di dati. Vi è infatti un altro algoritmo, proposto da Eckmann *et al.* (1986), che si basa sulla stima delle *mappe tangenti* dell'attrattore ricostruito con il metodo di Takens e consente il calcolo di tutti gli esponenti non negativi. Più pro-

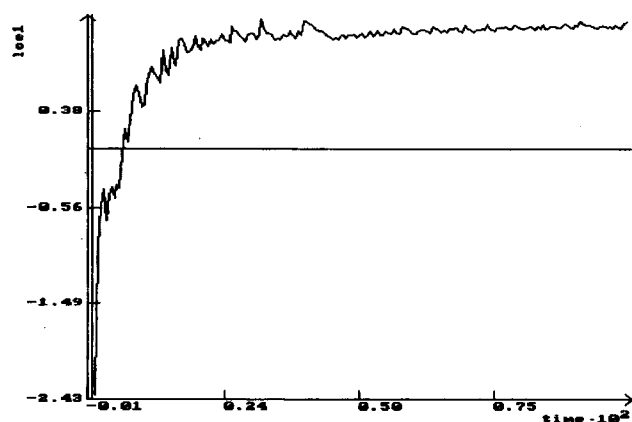


Fig. 4: Esempio di stima dell'esponente di Lyapunov dominante.

mettente, soprattutto per l'indagine su dati economici, è l'approccio statistico presentato in Nychka *et al.* (1992) e sviluppato per il calcolo dell'esponente di Lyapunov dominante in serie di dati poco numerose e provenienti da sistemi dinamici sottoposti a perturbazioni casuali. Questo metodo si mostra sostanzialmente come un'evoluzione del lavoro di Eckmann *et al.* (1986). L'idea di fondo rimane infatti il calcolo di λ_1 attraverso la stima delle matrici Jacobiane. Mentre però i primi utilizzano una semplice regressione lineare, Nychka *et al.* (1992) fanno ricorso a più sofisticate tecniche di regressione non parametrica (reti neurali e 'thin plate splines'). In maniera altrettanto promettente si innesta su questo filone l'algoritmo recentemente proposto da Gencay e Dechert (1992), anch'esso basato su tecniche non parametriche di tipo neurale, in grado di offrire stime dell'intero spettro di esponenti di Lyapunov.

6. Il test BDS

Sulla base della relazione (4.5) secondo cui $C_m(\varepsilon)$ converge asintoticamente in probabilità a $[C_1(\varepsilon)]^m$ quando i dati sono IID, Brock, Dechert e Scheinkman (1987) hanno sviluppato un particolare test (detto BDS) capace di rilevare nei dati la presenza di una vasta gamma di deviazioni dall'ipotesi di IID e quindi anche la presenza di eventuali DGP deterministici non lineari. La loro analisi parte con il considerare la quantità:

$$(6.1) \quad S_m(\varepsilon, N_m) = C_m(\varepsilon, N_m) - [C_1(\varepsilon, N_m)]^m$$

e dimostrano che il rapporto:

$$(6.2) \quad W_m(\varepsilon, N_m) = \sqrt{N_m} \frac{S_m(\varepsilon, N_m)}{\sqrt{V_m(\varepsilon, N_m)}}$$

sotto l'ipotesi che le y_t siano IID e per $N \rightarrow \infty$, converge in distribuzione ad una variabile normale con media zero e varianza 1, dove:

$$(6.3) \quad V_m(\varepsilon, N_m) = 4 \left[(m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2(m-1)} + K^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} \right]$$

e dove C e K sono dati rispettivamente da:

$$(6.4) \quad C = C_m(\varepsilon, N_m) = \frac{1}{N_m^2} \# \{(i, j) : m \leq i, j \leq N, s_{ij}^m < \varepsilon\}$$

$$(6.5) \quad K = K_m(\varepsilon, N_m) = \frac{1}{N_m^3} \# \{(i, j, k) : m \leq i, j, k \leq N, s_{ij}^m < \varepsilon, s_{jk}^m < \varepsilon\}.$$

È quindi evidente che la (6.2) rappresenta un test contro l'ipotesi nulla che la serie sotto osservazione sia IID: basta infatti calcolare la (6.2) per diversi valori di ε e di m e confrontare poi questo valore (chiamiamolo W_{calc}), con quello ricavato da una tavola della distribuzione normale standardizzata ($W_{\text{tab}}^{(\alpha)}$) per un dato livello di significatività α : nel caso in cui risulti $|W_{\text{calc}}| > |W_{\text{tab}}^{(\alpha)}|$ si è portati a rigettare l'ipotesi nulla, cioè a concludere che nei dati è presente una qualche deviazione dall'ipotesi IID. Hsieh e LeBaron (1988) hanno intensivamente studiato le proprietà del test BDS mettendo in evidenza la sua effettiva capacità di individuare la presenza di una grande varietà di DGP stocastici (lineari e non) e deterministici (non lineari), quali processi AR, MA, TAR, ARCH, GARCH, mappe caotiche e non stazionarietà di vario tipo.

Si comprende quindi che la statistica BDS può essere utilmente impiegata per indagare la presenza di dipendenza non lineare di natura deterministica nei dati, ma la sua applicazione deve essere condotta con particolare attenzione²³. Infatti, essendo BDS sensibile alla dipendenza lineare nei dati (ad es. processi AR), è necessario prima di tutto filtrare i dati tramite autoregressione e solo successivamente procedere ad applicare il test. Se esso

²³ Esistono naturalmente anche per questo test i problemi già espressi parlando della dimensione di correlazione, relativi alla scelta della dimensione di embedding m e del range di ε . Hsieh e LeBaron (1988) consigliano di assumere quest'ultimo fra 0.5 e 2 volte la deviazione standard del set di dati. La scelta di m è invece condizionata al numero N di dati disponibili: con 200-500 osservazioni m deve essere compreso fra 2 e 5, mentre con almeno 2000 osservazioni può crescere fino a 10.

conduce a rigettare l'ipotesi IID, si andrà da un lato a verificare, attraverso l'applicazione di opportuni test [cfr. Brock, Hsieh e LeBaron (1991), pp. 102-103], se i dati sono predicibili almeno nel breve periodo, il che corroborerebbe l'ipotesi di caos deterministico di bassa dimensione; dall'altra a stimare via via diversi modelli non lineari stocastici, applicando BDS sui residui così ottenuti. Nel caso esso porti ad accettare l'ipotesi nulla, si potrà ragionevolmente concludere che il modello specificato riesce a spiegare gran parte della variabilità dei dati sotto osservazione, escludendo comportamenti di natura caotica.

Per concludere ricordiamo qui l'approccio proposto da Savit e Green (1991) che si basa, mediante il calcolo degli integrali di correlazione con l'algoritmo di Grassberger e Procaccia, sulla determinazione degli indicatori:

$$(6.6) \quad \delta_j(\varepsilon) = 1 - \frac{C_j^2(\varepsilon, N_j)}{C_{j-1}(\varepsilon, N_{j-1})C_{j+1}(\varepsilon, N_{j+1})}$$

Approssimativamente parlando, essi esprimono la misura in cui il k -esimo elemento della serie è una funzione deterministica del $k-j$ -esimo elemento, dato un certo livello di tolleranza con cui la variabile è stata misurata.

Al pari di BDS, anche questo metodo mostra di essere in grado di identificare una vasta gamma di scostamenti dall'IID, oltreché, per sistemi caotici, di fornire una misura attendibile della minima dimensione di embedding necessaria per una ragionevole descrizione della dinamica, e del suo grado di predicibilità.

7. Ricerche empiriche

Numerose, anche se molto recenti, sono le applicazioni delle tecniche qui considerate alle serie storiche di natura economica. Le prime risalgono al non lontano 1986 ed il loro numero è andato crescendo assai rapidamente. Sostanzialmente esse possono essere suddivise in due grandi classi, corrispondenti a due ben distinti contesti operativi: i lavori che ricercano la presenza di non linearità e caos in dati macroeconomici (GNP, GDP, saggio di disoccupazione, aggregati monetari, produzione industriale, ecc...) e quelli che si riferiscono invece a dati tratti dai principali mercati finanziari (tassi di cambio, indici di rendimento dei titoli, di metalli preziosi, ecc...). Questa suddivisione [Brock (1988)] si rende necessaria per due motivi fondamentali: le serie analizzate dal primo gruppo di lavori sono infatti molto meno numerose e molto meno disaggregate rispetto a quelle del secondo. I dati macroeconomici, come è noto, presentano difficoltà e tempi di rilevazione assai maggiori e ciò incide significativamente sulla loro qualità, sulla caden-

za con cui si rendono disponibili e sulla loro numerosità (nella più felice delle ipotesi si dispone solamente di alcune centinaia di dati, 5-10 volte meno di quelli finanziari).

Per comodità e chiarezza espositiva suddividiamo la prima classe in tre gruppi:

- i lavori che si occupano dell'analisi di aggregati macroeconomici direttamente collegati al reddito, consumo ed investimento;
- le indagini sui principali aggregati del mercato del lavoro;
- i lavori che si riferiscono agli aggregati monetari.

Nel primo di questi troviamo i lavori pionieristici di Brock (1986) e Brock e Sayers (1986) che rappresentano in assoluto i primi tentativi di applicazione delle tecniche in questione a dati di natura economica. Essi analizzano alcuni aggregati post-seconda guerra mondiale dell'economia statunitense, e precisamente: il GNP reale su base trimestrale, il GPDI (Gross Private Domestic Investment) trimestrale (entrambe di circa 150 dati), la produzione industriale su base mensile ($N \approx 430$) e la produzione mensile di ghisa d'alto forno ($N \approx 700$). Dalle stime della dimensione di correlazione (α_m, SC_m), dalla loro comparazione con le dimensioni relative alle serie gaussiane pseudo casuali ed alle 'shuffled series', dall'applicazione del teorema di Brock e del test BDS sui residui di modelli AR(1), AR(4) e AR(8), emerge la presenza di consistenti non linearità soltanto nelle ultime due serie, ma non si trovano prove convincenti pro o contro la presenza di caos in alcuna di esse. Questi risultati appaiono confermati in due successivi lavori: Scheinkman e LeBaron (1989b) e Sayers (1990). Nel primo, dove sono presi in esame il GNP pro capite reale annuo dal 1870 al 1986 ed il saggio mensile di crescita della produzione industriale dal 1947 al 1987 statunitensi, gli autori prestano particolare attenzione ai delicati problemi della detrendizzazione, della scelta del 'miglior' modello da stimare per rimuovere dalla serie la componente lineare e di una più affidabile applicazione della 'shuffle diagnostic'. Applicando il test BDS sui residui e comparando i valori ottenuti con la distribuzione delle stime medesime relative a gruppi di 250 serie rimescolate, anche questi autori sono condotti a concludere che non linearità sono evidenti soltanto nel secondo aggregato. Sayers (1990) rianalizza il GNP degli U.S.A. congiuntamente alla produzione mensile di ghisa ed anche qui solo la seconda serie di dati mostra segni di una struttura deterministica non lineare sottostante. Esercizio analogo, ma su aggregati canadesi, è stato condotto da Frank e Stengos (1988b,c) i quali prendono in esame il GNE ($N \approx 150$) e le sue componenti: spesa personale C, spesa governativa G, e formazione lorda di capitale fisso I. Dopo opportuna detrendizzazione, destagionalizzazione e rimozione della componente lineare, essi stimano la dimensione di correlazione D dei residui, applicano il test di Brock, attuano la 'shuffle diagnostic' su 50 replicazioni e calcolano il

limite inferiore del più grande esponente di Lyapunov. Analogamente ai precedenti lavori, il complesso di queste analisi porta a ritenere che quasi tutta la variabilità di questi aggregati può essere 'spiegata' attraverso semplici modelli stocastici lineari. Da ultimo va ricordato lo studio comparativo di Frank, Gencay e Stengos (1988) nel quale sono sottoposte ad indagine, tramite le tecniche della *nonlinear dynamics*, i GNP trimestrali ($N \approx 100$) di Regno Unito, Giappone, Italia e Germania. I risultati pongono in rilievo una significativa non linearità esclusivamente nell'aggregato Giapponese. La presenza di caos sembra ancora una volta esclusa.

Nel secondo gruppo ritroviamo i lavori Brock (1986), Brock e Sayers (1986) e Sayers (1990). In essi vengono studiate le serie storiche del saggio di disoccupazione e dell'occupazione statunitensi (circa 150 dati ognuna). Il calcolo delle stime α_m e SC_m per le serie detrendizzate e per i residui, l'applicazione del test BDS, confermano tutti la presenza di una forte struttura deterministica non lineare. Brock e Sayers stimano anche il più grande esponente di Lyapunov tramite l'algoritmo di Wolf *et al.* (1985) ricavando valori positivi. Data però l'esigua quantità di dati, non si può di certo concludere a favore dell'esistenza di caos. Ham e Sayers (1990) avvalorano questa idea, analizzando il saggio di disoccupazione post-bellico disaggregato per settore e mostrando come gran parte della non linearità trovata sembra doversi imputare a delle componenti stocastiche non lineari di tipo SETAR (Self-Exciting Threshold AutoRegressive).

Inaspettatamente, il lavoro di Frank e Stengos (1988b) mette in evidenza che il saggio di disoccupazione canadese, a differenza di quello statunitense, non supera alcuno dei test di non linearità. Questa conclusione appare confermata dalla successiva analisi di Frank, Sayers e Stengos (1989) che si occupa del saggio di disoccupazione mensile riferito alle diverse provincie canadesi: in tutte, fatta eccezione per una, la rimozione della struttura lineare produce residui IID e quindi non pare possibile rigettare l'ipotesi nulla di una stocasticità lineare. Sayers (1988a,b) analizza la serie temporale dei giorni-uomo di inattività per interruzioni nella prestazione di lavoro a causa di scioperi ($N \approx 650$). La presenza di non linearità è qui confermata in varie direzioni: la serie passa il test residuale di Brock, le dimensioni di correlazione della serie originaria e dei residui sono infatti approssimativamente uguali ($4 < \alpha_m < 5$); i residui presentano una dimensione di correlazione significativamente inferiore a quella delle serie rimescolate ed i relativi GP plot mostrano marcate differenze²⁴. L'autore, nonostante queste prove e nonostante che il calcolo di λ_1 sui residui AR(1) sia positivo, non sembra però propenso ad accettare l'ipotesi di caos deterministico e ricerca altrove la causa della

²⁴ Sayers (1988a) spinge oltre l'analisi: i dati vengono suddivisi in due porzioni relative a due distinti periodi, evidenziando solo nella seconda la presenza di non linearità.

non linearità. L'applicazione del test di Engle [cfr. Engle (1982)] sembra infatti evidenziare una consistente presenza di effetti ARCH. Queste conclusioni appaiono una volta di più confermate dalle considerazioni di Ramsey, Sayers e Rothman (1990).

Nel terzo ed ultimo gruppo si collocano i lavori di Barnett e Chen (1987) e Chen (1988, 1990). Si tratta di una serie di studi estremamente interessante i quali si differenziano dagli altri sin qui presi in esame per la particolare attenzione posta allo spinoso problema della qualità dei dati. Infatti, come si è già detto più volte, il rumore prodotto da errori di misurazione e dalle procedure di aggregazione rende assai critici e poco affidabili i risultati ottenuti mediante le tecniche non parametriche della teoria dei sistemi dinamici. Per risolvere almeno in parte il problema, gli autori utilizzano dei particolari aggregati monetari elaborati recentemente da Barnett, denominati '*Divisia Monetary Aggregates*' (DMA)²⁵. Si è dimostrato che detti aggregati sono approssimazioni di secondo ordine della aggregazione monetaria teoricamente corretta, diversamente dagli aggregati M1, M2, M3, L (semplici somme della attività monetarie componenti) e dagli indici di Laspeyres e Paasche che sono, rispettivamente, approssimazioni di ordine zero ed uno. Nei DMA i termini residui sono soltanto di terzo ordine e di entità inferiore all'errore di arrotondamento commesso sui valori delle componenti. Il calcolo della dimensione di correlazione sui DMA settimanali detrendizzati log-linearmente ($N \approx 850$) porta a valori ben convergenti compresi fra 1.3 e 1.5 con dei GP plot molto stabili. Pure il calcolo del più grande esponente di Lyapunov conduce a stime stabili e positive, anche se di entità non elevata ($0.01 < \lambda_1 < 0.03$). In altri termini, gli autori riescono ad individuare, in buona parte degli aggregati monetari presi in esame, dei segni abbastanza chiari e convincenti della presenza di un attrattore strano. I dubbi sollevati da Ramsey, Sayers e Rothman (1990) riguardo la fonte ed il metodo impiegato nella costruzione degli indici settimanali consigliano però di essere cauti nel considerare questi risultati come prove definitive di caos economico. Chen (1990), al contrario, espone nuove ed approfondite considerazioni a sostegno della loro validità.

Per quanto concerne la seconda classe, quella delle indagini su dati finanziari, possiamo dire che le variabili economiche analizzate sono sostanzialmente di tre tipi:

- indici aggregati dei rendimenti dei titoli;
- tassi di rendimento di metalli preziosi,
- tassi di cambio delle principali valute.

²⁵ Molto sinteticamente, possiamo dire che i DMA, sia nel tempo continuo che in quello discreto, calcolano il saggio di crescita della quantità aggregata come media ponderata dei saggi di crescita delle quantità componenti, dove i pesi sono rappresentati dalle quote di spesa.

In Scheinkman e LeBaron (1989a) e Brock (1988) vengono ricercate prove della presenza di una struttura deterministica non lineare nell'indice giornaliero e settimanale ($N \approx 1200$) del rendimento di un portafoglio di titoli elaborato dal 'Center for Research in Security Prices at the University of Chicago' (CRSP), nell'indice mensile NYSE (pesato e non) ($N \approx 700$) e nella serie dei 'Treasury Bills Returns' (circa 650 dati). Gli autori individuano in ognuna di queste variabili dei valori di SC_m sufficientemente convergenti, compresi fra 5 e 6, e significativamente inferiori ai valori di SC_m calcolati su un campione di circa 150 serie rimescolate. Tramite l'algoritmo sviluppato da Eckmann *et al.* (1986), Eckmann *et al.* (1988) calcolano lo spettro degli esponenti di Lyapunov sull'indice settimanale CRSP trovando due valori positivi: $\lambda_1 \approx 0.15$ e $\lambda_2 \approx 0.1$. Sembrerebbe immediato concludere che nei dati è presente caos deterministico. Anche in questo caso è però consigliabile essere cauti: Brock (1988) ha infatti evidenziato che la presenza di un attrattore può essere provata soltanto per i primi 600 valori della serie, mentre invece Ramsey, Sayers e Rothman (1990) sostengono che le stime di SC_m sono distorte verso il basso per effetto di 25 dati 'anomali' relativi al periodo Luglio 1974 - Gennaio 1975. La loro eliminazione sembra infatti dissolvere ogni traccia dell'attrattore. LeBaron (1988a,b) e Hsieh (1990) ricercano altrove le possibili fonti di non linearità, trovando negli effetti ARCH delle spiegazioni plausibili.

Frank e Stengos (1988a, 1989) considerano i tassi di rendimento giornalieri, settimanali e bisettimanali dell'oro e dell'argento sul mercato di Londra. Nuovamente, la stima della dimensione di correlazione per la serie originaria e per i residui di un modello ARCH produce valori convergenti e compresi fra 6 e 7, ben al di sotto di quelli delle shuffled series.

Da ultimo, Papell e Sayers (1989) e Hsieh (1989) prendono in esame i tassi di cambio giornalieri ($N \approx 2500$), settimanali, mensili e trimestrali delle principali valute straniere (sterlina, marco, yen, franco francese e svizzero, lira) contro il dollaro e mettono in luce l'esistenza di una dipendenza non lineare nei dati, contrariamente all'idea, per lungo tempo dominante, che i tassi di cambio si comportino come 'random walks'. Gran parte di questa non linearità, come ben evidenziato dai risultati dell'applicazione del test BDS, sembra però doversi imputare a modelli stocastici GARCH, piuttosto che ad una struttura non lineare deterministica. A conclusioni analoghe giunge Kugler (1991). Prove più chiare della presenza di dinamiche caotiche sono state evidenziate nel tasso di cambio giornaliero Marco contro Dollaro (4204 osservazioni: gennaio 1973 - dicembre 1989) da Perli (1990) [cfr. anche Medio e Gallo (1992)]; in questo caso la serie è stata preliminarmente sottoposta a filtraggio, secondo il metodo sviluppato da Broomhead e King (1986). Ciò ha permesso di eliminare buona parte del rumore presente nei dati, consentendo di ottenere stime della dimensione di correlazione convergenti ad un

valore compreso fra 2 e 3 ed un valore dell'esponente di Lyapunov dominante convergente a 0.12.

8. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato la metodologia più largamente usata per individuare dinamiche di natura caotica nelle serie storiche economiche. Risulta chiaro che questo insieme di tecniche è tuttora ben lungi dal poter fornire risultati convincenti, anche se un dato appare già inequivocabile: la presenza di DGP non lineari (stocastici e/o deterministici) in molte delle serie analizzate. Molte risultano essere le possibili cause di questo insuccesso, prime fra tutte la scarsa qualità e quantità dei dati disponibili in economia. Non a caso, i risultati in un certo qual modo 'più convincenti' sono quelli ottenuti da lunghe serie di dati e/o dati disaggregati e di buona qualità, quali serie finanziarie e 'Divisia Monetary Aggregates'. Appare di conseguenza improbabile, almeno allo stato attuale, poter estrarre da serie di aggregati macroeconomici qualche indizio significativo.

A nostro avviso gli sforzi futuri dovranno articolarsi lungo due linee fondamentali:

i) sviluppare più efficienti algoritmi per il calcolo della dimensione e degli esponenti di Lyapunov, capaci di lavorare su dati scarsi e contaminati da rumore [in tale direzione si inquadrano i lavori di Gencay e Dechert (1992), Nychka *et al.* (1992) e Smith (1992)];

ii) sviluppare nuovi metodi di filtraggio in grado di eliminare dai dati il rumore presente, preservando la struttura dell'attrattore e le sue proprietà (geometriche e dinamiche) fondamentali [Broomhead e King (1986), Kostelich e Yorke (1988)] .

Non dobbiamo però attenderci che questi metodi numerici, anche nelle situazioni più favorevoli, potranno in futuro darci una risposta risolutiva alla questione del caos in una serie di dati: la soluzione dovrà essere sempre ricercata su di un piano teorico piuttosto che empirico. Al più essi potranno fornirci delle indicazioni, dei 'sintomi' della presenza del fenomeno che stiamo cercando.

La ricerca di evidenza empirica di caos in economia resta comunque un esercizio carico di importanti implicazioni. Essa infatti, da un lato, può agire da stimolo per uno slittamento del punto di osservazione dell'economista teorico e di chi fa politica economica, da una posizione di quasi esclusivo interesse per le forze agenti esternamente al sistema, quali spiegazioni dell'erraticità delle variabili interne, ad una focalizzazione del ruolo delle sorgenti endogene di instabilità e dei comportamenti a feedback positivo, come ad esempio comportamenti imitativi, meccanismi di tipo acceleratore-moltiplicatore ed altre fonti di non linearità [Brock (1990), Medio (1990),

Franke e Weghorst (1988)]. Dall'altra, impone una attenta riconsiderazione della nozione di casualità e della modellistica impiegata dalla statistica tradizionale [Bartlett (1990)].

BIBLIOGRAFIA

- A. BABLOYANTZ - J.M. SALAZAR - C. NICOLIS (1985), "Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle", *Physics Letters A*, 111, pp. 152.
- W. BARNETT - P. CHEN (1987), "The aggregation theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractor", in: W. Barnett - E. Berndt - H. White (a cura di), *Dynamic Econometric Modelling*, Cambridge University Press, New York.
- M.S. BARTLETT (1990), "Chance or chaos?", *Journal of the Royal Statistical Society A*, 153, pp. 321-347.
- J. BAUMOL - J. BENHABIB (1989), "Chaos: significance, mechanism and economic applications", *Journal of Economic Perspectives*, 3, No. 1, pp. 77-105.
- W.A. BROCK (1986), "Distinguishing random and deterministic systems: abridged version", *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 168-195.
- W.A. BROCK (1988), "Nonlinearity and complex dynamics in economics and finance" in P.W. Anderson, K.J. Arrow - D. Pines (a cura di), *The Economy as an Evolving Complex System*, Addison-Wesley Publishing, Redwood City.
- W.A. BROCK (1990), *Chaos and complexity in economic and financial science*, University of Wisconsin-Madison, SSRI Reprint Series No. 382.
- W.A. BROCK - W.D. DECHERT (1987), *Theorems on distinguishing deterministic from random systems*, University of Wisconsin-Madison, SSRI paper No. 8701.
- W.A. BROCK - C.L. SAYERS (1986), "In the business cycle characterized by deterministic chaos?", University of Wisconsin-Madison, SSRI Working Paper No. 8617, pubblicato in: *Journal of Monetary Economics* (1988), 22, pp. 71-90.
- W.A. BROCK - W.D. DECHERT - J.A. SCHEINKMAN (1987), *A test for independence based on the correlation dimension*, University of Wisconsin-Madison, SSRI paper No. 8702.
- W.A. BROCK - D.A. HSIEH - B. LEBARON (1991), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability. Statistical Theory and Economic Evidence*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- D.S. BROOMHEAD - G.P. KING (1986), "Extracting qualitative dynamics from experimental data", *Physica* 20D, pp. 217-236.
- A. BUTLER (1990), "A methodological approach to chaos: are economists missing the point?", *Federal Reserve Bank of St. Louis*.
- P. CHEN (1988), "Empirical and theoretical evidence of economic chaos", *System Dynamics Review*, 4, pp. 81-108. Ripubblicato in: Hao B-L. (a cura di) (1990), *Chaos II*, World Scientific Publishing, Singapore.
- P. CHEN (1990), *Searching for economic chaos: a challenge to mainstream econometric practice and nonlinear numerical experiments*, IC² Institute, The University of Texas at Austin, Working Paper No. 90-08-02.
- J.P. ECKMANN - D. RUELLE (1992), "Fundamental limitations for estimating dimensions and Liapunov exponents in dynamical systems", *Physica D* 56, pp. 185-187.
- J.P. ECKMANN - S. OLIFFSON KAMPHORST - D. RUELLE - S. CILIBERTO (1986), "Lyapunov exponents from time series", *Physical Review A*, 34, No. 6, pp. 4971-4979. Ripubblicato in: Hao B-L. (a cura di) (1990), *Chaos II*, World Scientific Publishing, Singapore.
- J.P. ECKMANN - S. OLIFFSON KAMPHORST - D. RUELLE - J.A. SCHEINKMAN (1988), "Lyapunov exponents for stock returns" in P.W. Anderson - K.J. Arrow - D. Pines (a cura di), *The Economy as an Evolving Complex System*, Addison-Wesley Publishing, Redwood City.
- I.R. EPSTEIN (1983), "Oscillations and chaos in chemical systems", *Physica* 7D, pp. 47-56. Ripubblicato in: D. Campbell - H. Rose (eds.), *Order in Chaos*, North Holland, Amsterdam.
- K.J. FALCONER (1985), *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, Cambridge.
- J.D. FARMER - E. OTT - J.A. YORKE (1983), "The dimension of chaotic attractors", *Physica* 7D, pp. 153-180. Ripubblicato in: D. Campbell - H. Rose (a cura di), *Order in Chaos*, North Holland, Amsterdam.
- J. FEDER (1988), *Fractals*, Plenum Press, New York and London.
- M. FRANK - T. STENGOS (1988a), "Chaotic dynamics in economic time series", *Journal of Economic Surveys*, 2, No. 2, pp. 103-133.
- M. FRANK - T. STENGOS (1988b), "Some evidence concerning macroeconomic chaos", *Journal of Monetary Economics*, 22, 423-438.
- M. FRANK - T. STENGOS (1988c), "The stability of Canadian macroeconomic data as measured by the largest Lyapunov exponent", *Economics Letters*, 27, pp. 11-14.
- M. FRANK - T. STENGOS (1989), "Measuring the strangeness of gold and silver rates of return", *Review of Economic Studies*, 56, pp. 553-567.
- M. FRANK - R. GENÇAY - T. STENGOS (1988), "International chaos?", *European Economic Review*, 32, pp. 1569-1584.
- M. FRANK - C.L. SAYERS - T. STENGOS (1989), *Evidence concerning nonlinear structure in provincial unemployment rates*, University of British Columbia, University of Houston and University of Guelph.
- M. FRANKE - W. WEGHORST (1989), "Complex dynamics in a simple input-output model without the full capacity utilization hypothesis", *Metroeconomica*, Vol. XXXIX, No. 1, pp. 1-29.
- R. GENÇAY - W.D. DECHERT (1992), "An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system", *Physica D* 59, pp. 142-157.
- A.L. GOLBERGER - V. BHARGAVA - B.J. WEST - A.J. MANDELL (1985) "Nonlinear dynamics of hearthbeat. Subharmonic bifurcations of the cardiac interbeat interval in sinus mode disease", *Physica* 17D, pp. 207.
- J.P. GOLLUB - E.J. ROMER - J.E. SOCOLAR (1980), "Trajectory divergence for coupled relaxation oscillators: measurement and models", *Journal of Statistical Physics* 23, pp. 321.

- P. GRASSBERGER - I. PROCACCIA (1983), "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica* 9D, pp. 189-208.
- B.T. GRENFELL (1992), "Chance and chaos in measles dynamics", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54, 2, pp. 383-398.
- J. GUCKENHEIMER - P. HOLMES (1983), *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer Verlag, Berlin.
- M.R. HAM - C.L. SAYERS (1990), "Testing for nonlinearities in united states unemployment by sector", paper presented at the 1990 Winter Meetings of the Econometric Society.
- D.A. HSIEH (1989), "Testing of nonlinear dependence in daily foreign exchange rates", *Journal of Business*, 62, No. 3, pp. 339-368.
- D.A. HSIEH (1990), "Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets", mimeo, Fuqua School of Business, Duke University, forthcoming *Journal of Finance*.
- D.A. HSIEH - B. LEBARON (1988), "Finite sample properties of BDS statistics", Graduate School of Business and Department of Economics, University of Chicago, preliminary draft.
- D. KELSEY (1988), "The economics of chaos or the chaos of economics", *Oxford Economic Papers*, 40, pp. 1-31.
- M.B. KENNEL - R. BROWN - H.D.I. ABRABANEL (1992), "Determining embedding dimensions for phase-space reconstruction using a geometrical construction", *Physical Review A*, 45(6), pp. 3403-3411.
- E.J. KOSTELICH - H. SWINNEY (1989), "Practical considerations in estimating dimension from times series data", *Physics Scripta*, 40, pp. 436-441.
- E.J. KOSTELICH - J.A. YORKE (1988), "Noise reduction in dynamical systems", *Physical Review A*, 38, No. 3, pp. 1649-1652. Ripubblicato in: B.L. Hao (a cura di) (1990), *Chaos II*, World Scientific Publishing, Singapore.
- P. KUGLER (1991), "Nonlinear dependence of exchange rate changes and international rate differentials: an empirical investigation", Konstanz Seminar on Monetary Theory and Monetary Policy, Bern.
- B. LEBARON (1988a), "Stock return nonlinearities: comparing tests and finding structure", University of Wisconsin-Madison, mimeo.
- B. LEBARON (1988b) "The changing structure of stock returns", University of Wisconsin-Madison, preliminary draft.
- A.J. LICHTENBERG - M.A. LIEBERMAN (1983), *Regular and stochastic motion*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 38, Springer Verlag, New York.
- W. LIEBERT - K. PAWELZIK - H.G. SCHUSTER (1991), "Optimal embedding of chaotic attractors from topological considerations", *Europhysics Letters*, 14, 6, pp. 521-526.
- B. MANDELBROT (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- A. MEDIO (1990), *Analisi dinamica nonlineare e caos in economia*, Società Italiana degli Economisti, XXXI Riunione Scientifica Annuale, 2-3 Novembre 1990.
- A. MEDIO - G.P. GALLO (1992), *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press.

- S.E. NEWHOUSE - D. RUELLE - F. TAKENS (1978), "Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m ($m=3$ or more)", *Communications on Mathematical Physics*, 64, pp. 35.
- D. NYCHKA - S. ELLNER - A.R. GALLANT - D. MCCAFFREY (1992), "Finding chaos in noisy systems", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54, 2, pp. 399-426.
- C. NICOLIS - G. NICOLIS (1984), "Is there a climatic attractor?", *Nature*, 311, pp. 529.
- L.F. OLSEN - H. DEGN (1985), "Chaos in biological systems", *Quarterly Review of Biophysics*, 18 pp. 165-225. Ripubblicato in: B.L. Hao (a cura di) (1990), *Chaos II*, World Scientific Publishing, Singapore.
- D.H. PAPELL - C.L. SAYERS (1989), "Nonlinear dynamics and exchange rate frequency", mimeo.
- R. PERLI (1990), *Analisi dinamica nonlineare in economia*, Tesi di Laurea, Università di Venezia-Cà Foscari.
- J.B. RAMSEY - H.J. YUAN (1989), "Bias and error bars in dimension calculations and their evaluation in some simple models", *Physics Letters A*, 134, No. 5, pp. 287-297.
- J.B. RAMSEY - C.L. SAYERS - P. ROTHMAN (1990), "The statistical properties of dimension calculations using small data sets: some economic applications", *International Economic Review*, 31, No. 4, pp. 991-1020.
- P.E. RAPP - A.M. ALBANO - T.I. SCHMAH - L.A. FARWELL (1991), "A causally filtered noise can mimic low dimensional chaotic attractors", Mimeo, Bryn Mawr College.
- J.C. ROUX (1983), "Experimental studies of bifurcations leading to chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction", *Physica* 7D, pp. 57-68. Ripubblicato in: D. Campbell - H. Rose (a cura di), *Order in Chaos*, North Holland, Amsterdam.
- T. SAUER - J.A. YORKE - M. CASDAGLI (1991), "Embedology", SFI Working Paper No. 91-01-008.
- C.L. SAYERS (1988a), "Diagnostic tests for nonlinearity in time series data: an application to the work stoppages series", mimeo.
- C.L. SAYERS (1988b), *Work stoppages: exploring the nonlinear dynamics*, University of Houston.
- C.L. SAYERS (1990), "Chaos and the business cycle", in S. Krasner (a cura di), *The Ubiquity of Chaos*, American Association for the Advancement of Science Publications, Washington D.C.
- R. SAVIT - M. GREEN (1991), "Time series and dependent variables", *Physica* D 50, pp. 95-116.
- W.M. SCHAFFER (1985), "Can nonlinear dynamics elucidate mechanism in ecology and epidemiology?", *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 2, pp. 221-252. Ripubblicato in: B.L. Hao (a cura di) (1990), *Chaos II*, World Scientific Publishing, Singapore.
- J.A. SCHEINKMAN - B. LEBARON (1989a), "Nonlinear dynamics and stock returns", *Journal of Business* 62, No. 3, pp. 311-337.
- J.A. SCHEINKMAN e LEBARON B. (1989b), "Nonlinear dynamics and GNP data" in W. Barnett, J. Geweke, K. Shell (a cura di), *Economic Complexity, Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- R.L. SMITH (1991), "Optimal Estimation of Fractal Dimension", in M. Casdagli - S. Eubank (a cura di), *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Vol. 12, SFI Studies in the Science of Complexity, Addison Wesley, Redwood City.

- R.L. SMITH (1992), "Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54, 2, pp. 329-351.
- H.L. SWINNEY (1988), *Instabilities and chaos in rotating fluids* in P. Zweifel, G. Gallavotti e M. Anile (1988) (a cura di), *Nonlinear Evolution and Chaotic Phenomena*, Plenum Publishing.
- F. TAKENS (1981), *Detecting strange attractors in turbulence*, in D.A. Rand e L. Young (a cura di), *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics No. 898, Springer Verlag, Berlin.
- F. TAKENS (1985), "Distinguishing deterministic and random system" in G. Roseblatt - G. Iooss - D. Joseph (a cura di), *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, Boston.
- J. THEILER (1988), "Lacunarity in a Best Estimator of Fractal Dimension", *Phys. Lett. A*, 133, pp. 195-200.
- R. VAUTARD - M. GHIL (1989), "Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series", *Physica 35D*, pp. 395-424.
- A. WOLF - J.B. SWIFT - H.L. SWINNEY - J.A. VASTANO (1985), "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica 16D*, pp. 285-317.