Proprietà statistiche dei sistemi dinamici deterministici discreti

Marco Sandri
Viale Rimembranza 2
37015 Sant'Ambrogio di Valpolicella
(Verona) - Italy
info@msandri.it
http://www.msandri.it/

03 Luglio 1993

Capitolo 1

Proprietà statistiche dei sistemi dinamici deterministici discreti

1.1 Gli operatori di Markov e di Frobenius-Perron.

1.1.1 Operatore di Markov.

Definizione 1.1 *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura. Qualsiasi operatore* <u>*lineare*</u> $P : L^1 \to L^1$ *che gode delle proprietà :*

1. $Pf \geq 0$;
2. $||Pf|| = ||f||$;

per ogni $f \geq 0$, $f \in L^1$, *è detto* **operatore di Markov**.

Gli operatori di Markov godono di una serie di proprietà che andiamo qui in parte ad elencare e che avremo modo di utilizzare più avanti.

Proposizione 1.1 1. *L'operatore di Markov è* **monotono**, *cioè se* $f, g \in L^1$ *e* $f \geq g$, *allora* $Pf \geq Pg$.

2. *Se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è uno spazio di misura e* P *un operatore di Markov, allora per ogni* $f \in L^1$:
   (a) $(Pf)^+ \leq Pf^+$;
   (b) $(Pf)^- \leq Pf^-$;
   (c) $|Pf| \leq P|f|$.

3. *Se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è uno spazio di misura e* P *un operatore di Markov, allora per ogni* $f \in L^1$*:*
$$||Pf|| \leq ||f||. \tag{1.1}$$
L'operatore di Markov è cioè una **contrazione***, e la (1.1) è detta proprietà di contrazione di* P*.*

Dimostrazione.

La proprietà 1) si ricava dal fatto che $f-g \geq 0$ e quindi per la definizione 1.1 è $P(f-g) \geq 0$. Dalla linearità di P segue: $Pf - Pg \geq 0$.

Le proprietà 2a) si ricava in modo diretto:
$$(Pf)^+ = (Pf^+ - Pf^-)^+ = \max\{0, Pf^+ - Pf^-\} \leq \max\{0, Pf^+\} = Pf^+,$$
ed analogamente la proprietà 2b).

Dalle 2a) e 2b) si mostra che:
$$|Pf| = (Pf)^+ + (Pf)^- \leq Pf^+ + Pf^- = P(f^+ - f^-) = P|f|,$$
e quindi la 2c) è dimostrata.

Infine:
$$||Pf|| = \int_X |Pf|\, d\mu \leq \int_X P|f|\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu = ||f||,$$
il che conferma la 3). Questa proprietà è estremamente importante, infatti essa implica che, per ogni $f \in L^1$, si ha:
$$||P^n f|| = ||P(P^{n-1}f)|| \leq ||P^{n-1}f||$$
e quindi, per ogni coppia $f_1, f_2 \in L^1$, con $f_1 \neq f_2$, è :
$$||P^n f_1 - P^n f_2|| = ||P^n(f_1 - f_2)|| \leq ||P^{n-1}(f_1 - f_2)|| = ||P^{n-1}f_1 - P^{n-1}f_2||.$$
Quest'ultima disuguaglianza stabilisce che, durante il processo di iterazione di due distinte funzioni, la distanza fra esse può decrescere, ma non può mai crescere. Questa viene indicata come **proprietà di stabilità** delle iterazioni degli operatori di Markov. $\diamondsuit$

Definizione 1.2 *Il* **supporto** *di una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *è la chiusura dell'insieme di tutti gli elementi di* x *per i quali* $f(x) \neq 0$*, cioè :*
$$\operatorname{supp} f = \operatorname{Cl}\{x \in X | f(x) \neq 0\}. \tag{1.2}$$

Se f è un elemento di L^p, allora l'insieme (1.2) non è definito in un'unica maniera, poichè f può essere rappresentata da funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla. Questa imprecisione non conduce però mai a complicazioni nel calcolo della misura e degli integrali. Di conseguenza è abitudine semplificare la terminologia e parlare dei supporti degli elementi di L^p come se si stesse parlando di insiemi veri e propri. Se si vuole comunque enfatizzare il fatto che una relazione fra insiemi non vale precisamente ma può essere violata su di un insieme di misura zero, si dice che essa vale *modulo zero*. Ad esempio $A = B$ modulo zero significa che l'insieme delle x in A che non appartengono a B, e viceversa, ha misura zero.

Proposizione 1.2 $||Pf|| = ||f||$ *se e soltanto se* Pf^+ *e* Pf^- *hanno supporti disgiunti.*

Dimostrazione. Partiamo dalla ben nota disuguaglianza sui valori assoluti:

$$|Pf^+ - Pf^-| \le |Pf^+| + |Pf^-|.$$

Essa vale in senso stretto se contemporaneamente $Pf^+ > 0$ e $Pf^- > 0$, mentre vale come uguaglianza se è $Pf^+ = 0$ oppure $Pf^- = 0$. Quindi, integrando sullo spazio X, abbiamo:

$$\int_X |Pf^+ - Pf^-| \, d\mu = \int_X |Pf^+| \, d\mu + \int_X |Pf^-| \, d\mu$$

se e soltanto se non esiste alcun insieme $A \in \mathcal{A}$ di misura positiva, tale che sia al contempo $Pf^+ > 0$ e $Pf^- > 0$ per $x \in A$. In altre parole, Pf^+ e Pf^- devono avere supporti disgiunti. Osservando che $f = f^+ - f^-$, la relazione qui sopra riportata può essere così riscritta:

$$||Pf|| = ||Pf^+|| + ||Pf^-|| = ||f^+|| + ||f^-|| = ||f||.$$

La proposizione è pertanto dimostrata. $\diamondsuit$

Definizione 1.3 *Se* P *è un operatore di Markov e, per qualche* $f \in L^1$*, è* $Pf = f$*, allora* f *è detta* **punto fisso** *di* P.

Proposizione 1.3 *Se* $Pf = f$*, allora* $Pf^+ = f^+$ *e* $Pf^- = f^-$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi $Pf = f$ segue facilmente:

$$f^+ = (Pf)^+ \le Pf^+ \qquad \text{e} \qquad f^- = (Pf)^- \le Pf^-,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_X \left[Pf^+ - f^+\right] d\mu + \int_X \left[Pf^- - f^-\right] d\mu \\ &= \int_X \left[Pf^+ + Pf^-\right] d\mu - \int_X \left[f^+ + f^-\right] d\mu \\ &= \int_X P|f| \, d\mu - \int_X |f| \, d\mu = ||\,P|f|\,|| - ||\,|f|\,||. \end{aligned}$$

Per la proprietà (1.1) di contrazione di P, sappiamo che:

$$|| \, P|f| \, || - || \, |f| \, || \leq 0,$$

da cui:

$$\int_X \left[Pf^+ - f^+ \right] d\mu + \int_X \left[Pf^- - f^- \right] d\mu = 0.$$

Quest'ultima è vera solo se $Pf^+ = f^+$ e $Pf^- = f^-$. $\diamondsuit$

Concludiamo il paragrafo introducendo alcune definizioni che saranno indispensabili nel prosieguo, unitamente ad uno dei più importanti teoremi della teoria della misura: il teorema di Radon-Nikodym.

Definizione 1.4 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia definito l'insieme:*

$$D(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)| \quad f \geq 0 \quad \text{e} \quad ||f|| = 1\}. \tag{1.3}$$

Qualsiasi funzione $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detta **densità** .

Definizione 1.5 *Una misura λ è detta* **assolutamente continua** *rispetto a μ ($\lambda \ll \mu$) se $\lambda(A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ in corrispondenza del quale $\mu(A) = 0$.*

Se esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\lambda(E) = \lambda(A \bigcap E)$ per ogni $E \in \mathcal{A}$, si dice che λ è **concentrata** *su A, il che equivale a dire che $\lambda(E) = 0$ ogni qual volta $E \bigcap A = \emptyset$.*

Se λ e μ sono due misure definite su $\mathcal{A}$, e se esistono due insiemi disgiunti A e B tali che λ è concentrato su A e μ su B, le due misure vengono dette **singolari** *tra loro ($\lambda \perp \mu$).*

Teorema 1.1 *Siano μ e λ misure positive limitate su di una σ-algebra $\mathcal{A}$ in un insieme non vuoto X.*

1. *Esiste un'unica coppia di misure λ_a e λ_s su $\mathcal{A}$ (decomposizione di Lebesgue di λ rispetto a μ) tale che:*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \lambda_a \ll \mu, \qquad \lambda_s \perp \mu.$$

2. **(Radon-Nikodym)** *Esiste una ed una sola $h \in L^1$ (chiamata derivata di Radon-Nikodym di λ_a rispetto a μ) tale che:*

$$\lambda_a(A) = \int_A h \, d\mu \qquad A \in \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

Il punto 2) di questo teorema prima di tutto afferma che, se h è un qualsiasi elemento di $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'integrale nella (1.4) definisce una misura su $\mathcal{A}$ che è (chiaramente) assolutamente continua rispetto a μ. L'elemento cruciale stabilito dal teorema di Radon-Nikodym è che è vera anche l'affermazione inversa: per ogni coppia di misure assolutamente continue $\lambda \ll \mu$ (nel qual caso $\lambda_a = \lambda$) esiste sempre un'unica funzione integrabile h che definisce λ a partire da μ.

Per i nostri scopi ci interessa anche sottolineare che, se $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, allora la misura normalizzata:

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \text{per} \quad A \in \mathcal{A},$$

è assolutamente continua rispetto a μ, ed f è detta **densità di** $\mu_f(A)$.

Definizione 1.6 *Analogamente a quanto fatto nella definizione 1.3, detto* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e* P *un operatore di Markov, si definisce* **densità stazionaria** *di* P *qualunque funzione* $f \in D$ *che soddisfa* $Pf = f$.

Definizione 1.7 *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura. Una trasformazione* $S : X \to X$ *è misurabile se:*

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \qquad \forall \ A \in \mathcal{A}.$$

Definizione 1.8 *Una trasformazione misurabile* $S : X \to X$ *su uno spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è* **non singolare** *se:*

$$\mu(S^{-1}(A)) = 0 \qquad \forall \ A \in \mathcal{A} \qquad \text{tale che} \quad \mu(A) = 0.$$

1.1.2 Operatore di Frobenius-Perron.

Definizione 1.9 *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura. Se* $S : X \to X$ *è una trasformazione non singolare, l'operatore* $P : L^1 \to L^1$ *definito in modo univoco dall'equazione:*

$$\int_A Pf \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu \qquad \text{per} \quad A \in \mathcal{A}, \tag{1.5}$$

è detto **operatore di Frobenius-Perron** *corrispondente ad* S.

Data una trasformazione non singolare $S : X \to X$ su uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e data una funzione $f \in L^1$ e $f \geq 0$, definiamo:

$$\lambda(A) = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu, \tag{1.6}$$

che è, per quanto già detto in precedenza, una misura definita su $\mathcal{A}$ e, per la non singolaritá di S, assolutamente continua rispetto a μ.

Per il teorema di Radon-Nikodym esiste allora un unico elemento in L^1, che chiamiamo Pf, tale che:

$$\int_A Pf\, d\mu = \lambda(A) = \int_{S^{-1}(A)} f\, d\mu \qquad \text{per} \quad A \in \mathcal{A}.$$

L'operatore può poi essere esteso ad una $f \in L^1$ arbitraria, non necessariamente non negativa. Definito:

$$Pf := Pf^+ - Pf^-,$$

abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \int_A Pf\, d\mu &= \int_{S^{-1}(A)} Pf^+\, d\mu - \int_{S^{-1}(A)} Pf^-\, d\mu \\ &= \int_{S^{-1}(A)} f^+\, d\mu - \int_{S^{-1}(A)} f^-\, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f\, d\mu \end{aligned}$$

Vediamo ora alcune proprietà elementari degli operatori di Frobenius-Perron.

Proposizione 1.4 *Sia P l'operatore di Frobenius-Perron definito dalla (1.5).*

1. *P è un operatore lineare, cioè, per ogni coppia $f_1, f_2 \in L^1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha: $P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 P f_1 + \lambda_2 P f_2$.*
2. *$Pf \geq 0$ se $f \geq 0$.*
3. *$\int_X Pf\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.*
4. *Se $S_n = S \circ \overset{n}{\cdots} \circ S$ e P_n è l'operatore di Frobenius-Perron corrispondente a S_n, allora $P_n = P^n$, dove P è l'operatore di Frobenius-Perron corrispondente ad S.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione delle proprietà 1), 2) e 3) in quanto banale. Per l'ultima proposizione è sufficiente osservare che:

$$\int_{S^{-2}(A)} f\, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} Pf\, d\mu = \int_A P(Pf)\, d\mu = \int_A P^2 f\, d\mu.$$

$\diamondsuit$

Sebbene la definizione di operatore di Frobenius-Perron si basi, in un certo qual senso, su di un teorema piuttosto astratto della teoria della misura, ci si rende conto che esso concretamente descrive l'evoluzione di f sotto l'azione della trasformazione S, e le proprietà qui sopra elencate confermano ciò che a livello intuitivo ci si attende.

Oltre a ciò, si vede bene che gli operatori di Frobenius-Perron costituiscono una particolare sottoclasse degli operatori di Markov, e quindi ogni proprietà di questi ultimi è immediatamente applicabile ai primi. Al contempo, mentre gli operatori di Frobenius-Perron sono adatti, come mostreremo, a descrivere le proprietà statistiche dei sistemi deterministici, gli operatori di Markov trovano applicazione sia nello studio del comportamento dei sistemi deterministici che di quelli stocastici. Per tali ragioni si cercherà sempre, dove possibile, di formulare concetti e risultati per gli operatori di Markov.

Esempio 1.1 In alcuni casi particolarmente 'fortunati' la relazione (1.5) ci permette di ottenere la forma esplicita di Pf. Se ad esempio $X = [a, b]$ è un intervallo sulla retta reale $\mathbb{R}$, ed $A = [a, x] \in \mathcal{A}$, allora la (1.5) diventa:

$$\int_a^x Pf(s)ds = \int_{S^{-1}([a,x])} f(s)ds,$$

da cui, derivando:

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a,x])} f(s)ds.$$

Nel caso in cui la trasformazione S sia poi una funzione monotona crescente (e quindi $S^{-1}([a, x]) = [S^{-1}(a), S^{-1}(x)]$) ed S^{-1} abbia derivata prima continua, si ricava:

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} f(s)ds = f(S^{-1}(x)) \frac{d}{dx}[S^{-1}(x)].$$

Se S è invece monotona decrescente, il segno del termine a destra viene semplicemente invertito. Quindi nel caso uni-dimensionale in cui S è derivabile ed invertibile con $\frac{dS^{-1}}{dx}$ continua, abbiamo:

$$Pf(x) = f(S^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx}[S^{-1}(x)] \right|. \tag{1.7}$$

Supponendo ora che $S(x) = e^x$, abbiamo:

$$Pf(x) = \frac{1}{x} f(\ln x).$$

Se prendiamo una densità uniforme iniziale f sull'intervallo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x),$$

sotto l'azione di P, la funzione f viene trasformata in:

$$Pf(x) = \frac{1}{2x}\chi_{[e^{-1},e]}(x).$$

△

Questo esempio mostra due fatti molto importanti:

1. data una funzione iniziale f il cui supporto è $[a, b]$, il supporto di Pf è $[S(a), S(b)]$;

2. Pf è piccolo dove $\frac{dS}{dx}$ è grande e viceversa.

La prima di queste osservazioni può essere generalizzata come segue.

Proposizione 1.5 *Sia $S : X \to X$ una trasformazione non singolare e P l'operatore di Frobenius-Perron ad essa associato.. Assumiamo sia data una $f \geq 0$, $f \in L^1$. Allora:*

$$\operatorname{supp} f \subset S^{-1}(\operatorname{supp} Pf),$$

e, più in generale, per ogni $A \in \mathcal{A}$ vale la seguente equivalenza: $Pf(x) = 0$ per $x \in A$ se e soltanto se $f(x) = 0$ per $x \in S^{-1}(A)$.

Dimostrazione. La (1.5) può essere così riscritta:

$$\int_X \chi_A Pf \, d\mu = \int_X \chi_{S^{-1}(A)} f \, d\mu.$$

Per le proprietà dell'integrale di Lebesgue, $Pf(x) = 0$ per $x \in A$, implica $f(x) = 0$ per $x \in S^{-1}(A)$, e viceversa. Se ora si pone $A = X \setminus \operatorname{supp}(Pf)$, ci troviamo proprio nella situazione appena sopra descritta, e quindi $f(x) = 0$ per $x \in S^{-1}(A)$. In altri termini:

$$\operatorname{supp} f \subset X \setminus S^{-1}(A) = X \setminus S^{-1}(X \setminus \operatorname{supp} Pf) = X \setminus (X \setminus S^{-1}(\operatorname{supp} Pf)) = S^{-1}(\operatorname{supp} Pf).$$

$\diamondsuit$

Nel caso in cui $f \in L^1$ sia arbitraria, non necessariamente non negativa, allora la proposizione precedente si riduce a: se $f(x) = 0$ per ogni $x \in S^{-1}(A)$, allora $Pf(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Che il contrario non sia vero lo si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 1.2 Sia $X = [0, 1]$ l'intervallo sulla retta reale $\mathbb{R}$, $A = [0, x] \in \mathcal{A}$ per $x \in [0, 1)$, e $S : X \to X$ sia la trasformazione diadica:

$$S(x) = 2x \mod 1.$$

La controimmagine secondo S di $[0, x] \subset [0, 1]$ è data da:

$$S^{-1}([0, x]) = [0, \frac{x}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}].$$

S è evidentemente non singolare. L'operatore di Frobenius-Perron è :

$$\int_0^x Pf(s)ds = \int_{[0,\frac{x}{2}]\cup[\frac{1}{2},\frac{x+1}{2}]} f(s)ds = \int_0^{\frac{x}{2}} f(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} f(s)ds,$$

da cui:

$$Pf(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\frac{x}{2}} f(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} f(s)ds\right] = \frac{1}{2} f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} f(\frac{x+1}{2}).$$

Scegliendo la funzione di densità iniziale f:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

abbiamo:

$$Pf(x) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 0.$$

Quindi $Pf(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1)$, mentre $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [0,1)$. $\triangle$

Esempio 1.3 Un altro interessante caso si presenta quando $X = [a,b] \times [c,d]$ sul piano $\mathbb{R}^2$. Poniamo $A = [a,x] \times [c,y]$, cosicché la (1.5) diventa:

$$\int_a^x ds \int_c^y Pf(s,t)dt = \iint_{S^{-1}([a,x]\times[c,y])} f(s,t)ds\ dt.$$

Derivando prima rispetto ad x e poi rispetto ad y, si ottiene:

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \iint_{S^{-1}([a,x]\times[c,y])} f(s,t)\ ds\ dt. \tag{1.8}$$

Una formula del tutto analoga può essere determinata nel caso $X \subset \mathbb{R}^d$. $\triangle$

Nel caso generale in cui $X = \mathbb{R}^d$ ed $S : X \to X$ è invertibile, possiamo derivare una interessante ed utile generalizzazione dell'equazione (1.7). Per fare questo, dobbiamo però prima enunciare e provare un teorema relativo al cambio di variabile, basato sul teorema di Radon-Nikodym.

Teorema 1.2 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, sia $f \in L^1 \cap L^\infty$ (consideriamo cioè funzione integrabile e limitata) e $S : X \to X$ una trasformazione non singolare. Allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$:*

$$\int_{S^{-1}(A)} f(S)\, d\mu = \int_A f\, d\mu S^{-1} = \int_A f J^{-1}\, d\mu, \tag{1.9}$$

dove μS^{-1} indica la misura:

$$\mu S^{-1}(B) = \mu(S^{-1}(B)), \qquad \text{per } B \in \mathcal{A},$$

e J^{-1} è la densità di μS^{-1} rispetto a μ, cioè:

$$\mu(S^{-1}(B)) = \int_B J^{-1}\, d\mu, \qquad \text{per } B \in \mathcal{A}.$$

Dimostrazione. È noto che, per ogni funzione misurabile f, esiste una sequenza di funzioni semplici:

$$s_n(x) = \sum_i \alpha_{i,n} \chi_{A_{i,n}},$$

tale che:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. su } X \qquad \text{e} \qquad |s_n| \le |f|.$$

Per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Da questa osservazione si può trarre un utile insegnamento: molte dimostrazioni possono essere semplificate suddividendo l'argomentazione in due fasi. Per prima cosa si provano le asserzioni per le sole funzioni semplici e successivamente si passa al limite.

Ciò è quanto andiamo qui a compiere.
a) Assumiamo inizialmente $f(x) = \chi_B(x)$, cosicché $f(S(x)) = \chi_B(S(x)) = \chi_{S^{-1}(B)}$. Il primo integrale della (1.9) diventa:

$$\begin{aligned}\int_{S^{-1}(A)} f(S)\, d\mu &= \int_X \chi_{S^{-1}(A)} f(S)\, d\mu = \int_X \chi_{S^{-1}(A)}\chi_{S^{-1}(B)}\, d\mu \\ &= \mu(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B)) = \mu(S^{-1}(A \cap B)).\end{aligned}$$

Il secondo integrale è :

$$\int_A f \, d\mu S^{-1} = \int_X \chi_A \chi_B \, d\mu S^{-1} = \mu(S^{-1}(A \cap B)).$$

il terzo ed ultimo integrale vale:

$$\int_A f J^{-1}\, d\mu = \int_A \chi_B J^{-1}\, d\mu = \int_{A\cap B} J^{-1}\, d\mu = \mu(S^{-1}(A \cap B)).$$

Abbiamo in questo modo dimostrato il teorema quando f è una funzione del tipo $f(x) = \chi_B$.
b) Dobbiamo ora provare che esso vale anche quando f è una funzione semplice. Ciò è immediato perché da un lato ogni funzione semplice può essere espressa come combinazione lineare di funzioni caratteristiche, e dall'altra l'integrale di Lebesgue gode della proprietà di linearità .
c) L'ultimo passo consiste nel passare al limite dimostrando che il teorema vale per una generica f limitata ed integrabile[(1)]. $\diamondsuit$

Possiamo a questo punto enunciare un utile risultato.

Proposizione 1.6 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $S : X \to X$ una trasformazione non singolare invertibile, e P l'operatore di Frobenius-Perron associato. Allora, per ogni $f \in L^1 \cap L^\infty$, è:*

$$Pf = f(S^{-1})J^{-1}. \tag{1.10}$$

[1] La richiesta che f sia limitata è dettata dalla necessità che fJ^{-1} sia integrabile.

Dimostrazione. Per la definizione data di operatore di Frobenius-Perron abbiamo:

$$\int_A Pf\,d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f\,d\mu \qquad \text{per } A \in \mathcal{A}.$$

Cambiamo ora la variabile nell'integrale di destra ponendo $y = S(x)$, cosicché, essendo S per ipotesi invertibile:

$$\int_A Pf\,d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f\,d\mu = \int_A f(S^{-1})\,d\mu S^{-1} = \int_A f(S^{-1})J^{-1}\,d\mu.$$

Per la ben nota proprietà dell'integrale di Lebesgue, segue:

$$Pf = f(S^{-1})J^{-1}.$$

$\diamondsuit$

È stata qui utilizzata la notazione J^{-1} per evidenziare la connessione con il caso, visto negli esempi precedenti, di trasformazioni derivabili ed invertibili in $\mathbb{R}^d$. In questa situazione infatti J è il determinante della matrice Jacobiana:

$$J = \left|\frac{dS(x)}{dx}\right| \qquad e \qquad J^{-1} = \left|\frac{dS^{-1}(x)}{dx}\right|.$$

1.1.3 Operatore di Koopman.

Introduciamo qui un terzo tipo di operatore che è strettamente legato all'operatore di Frobenius-Perron.

Definizione 1.10 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $S : X \to X$ una trasformazione non singolare ed $f \in L^\infty$. L'operatore $U : L^\infty \to L^\infty$ definito da:*

$$Uf := f(S) \tag{1.11}$$

è detto **operatore di Koopman** *relativo ad S.*

In virtù della non singolarità di S, U è ben definito poiché $f_1(x) = f_2(x)$ quasi ovunque, implica $f_1(S(x)) = f_2(S(x))$ quasi ovunque.

Vediamo alcune sue proprietà .

Proposizione 1.7 *Detto U l'operatore di Koopman relativo alla trasformazione non singolare S, si ha:*

1. *per ogni coppia $f_1, f_2 \in L^\infty$, e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Uf_1 + \lambda_2 Uf_2$;*

2. *per ogni* $f \in L^\infty$, U *è una contrazione su* L^∞, *cioè:* $||Uf||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty}$;
3. *per ogni* $f \in L^1$ *e* $g \in L^\infty$:
$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, Ug\rangle, \tag{1.12}$$
in altre parole l'operatore U *è* **coniugato** *all'operatore di Frobenius-Perron* P.

Dimostrazione.

La prova della proprietà 1) è banale e quindi la omettiamo.

La proprietà 2) segue dalla definizione di norma $||\cdot||_{L^\infty}$: infatti $|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty}$ quasi ovunque, quindi anche $|f(S(x))| \leq ||f||_{L^\infty}$ quasi ovunque. Essendo $Uf(x) = f(S(x))$, la relazione $||Uf||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty}$ segue immediata.

L'ultima affermazione va provata come di consueto in tre fasi. Poniamo inizialmente $g = \chi_A$, allora:
$$\langle Pf, g\rangle = \int_X Pf\chi_A \, d\mu = \int_A Pf \, d\mu,$$
e:
$$\langle f, Ug\rangle = \int_X fU\chi_A \, d\mu = \int_X f\chi_A(S) \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu.$$
Quindi la (1.12) è equivalente a:
$$\int_A Pf \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu,$$
che è l'equazione che definisce P. Dato che la proprietà 3) è vera per $g = \chi_A$ (e per la linearità dell'integrale di Lebesgue), è vera anche per qualsiasi funzione semplice $g = s_n$, e quindi anche per ogni $g \in L^\infty$. $\diamondsuit$

Utilizzando gli operatori di Koopman è agevole provare la seguente proprietà degli operatori di Frobenius-Perron.

Proposizione 1.8 *Per ogni sequenza* $\{f_n\} \subset L^1$ *la condizione* f_n *'converge debolmente ad* f*' implica '*Pf_n *converge debolmente a* Pf*'. In altre parole l'operatore di Frobenius-Perron è debolmente continuo.*

Dimostrazione. Per la proprietà 3) della proposizione 1.7 è:
$$\langle Pf_n, g\rangle = \langle f_n, Ug\rangle \qquad \text{per } g \in L^\infty.$$
Poiché f_n converge debolmente ad f, $\langle f_n, Ug\rangle$ converge debolmente a $\langle f, Ug\rangle = \langle Pf, g\rangle$. Ciò significa che Pf_n converge debolmente a Pf. $\diamondsuit$

La medesima dimostrazione può essere condotta per un operatore di Markov arbitrario P (e più in generale per ogni operatore lineare limitato). In tal caso si deve utilizzare il fatto che, per ogni operatore di Markov, esiste un unico operatore $P^* : L^\infty \to L^\infty$ il quale soddisfa:
$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, P^*g\rangle \qquad \text{per } f \in L^1, g \in L^\infty.$$

1.2 Sistemi ergodici, mescolanti ed esatti.

1.2.1 Trasformazioni che preservano la misura.

Definizione 1.11 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura ed $S : X \to X$ una funzione misurabile. Si dice che S* **preserva la misura** *se:*

$$\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A) \qquad \forall\ A \in \mathcal{A}. \tag{1.13}$$

La misura μ viene detta **invariante** *sotto l'azione di S se S è una trasformazione che preserva la misura.*

Ogni trasformazione che preserva la misura è quindi necessariamente non singolare.

Il seguente teorema permette di stabilire, attraverso l'uso degli operatori di Frobenius-Perron, se una data misura è invariante sotto l'azione di S.

Teorema 1.3 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $S : X \to X$ una mappa non singolare e P l'operatore di Frobenius-Perron associato ad S. Consideriamo inoltre una $f \in L^1$ non negativa. La misura μ_f data da:*

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\mu$$

è invariante se e soltanto se f è un punto fisso di P.

Dimostrazione. Proviamo inizialmente la parte del teorema relativa al 'solo se'. Assumiamo μ_f invariante. Per la definizione 1.13 di misura invariante:

$$\mu_f(A) = \mu_f(S^{-1}(A)) \qquad \forall\ A \in \mathcal{A},$$

cioè :

$$\int_A f\, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f\, d\mu \qquad \forall\ A \in \mathcal{A}. \tag{1.14}$$

Per la definizione di operatore di Frobenius-Perron, abbiamo:

$$\int_{S^{-1}(A)} f\, d\mu = \int_A Pf\, d\mu \qquad \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Da quest'ultima relazione e dalla (1.14) segue immediatamente $Pf = f$.

Al contrario, se $Pf = f$ per qualche $f \in L^1$ non negativa, allora dalla definizione di operatore di Frobenius-Perron segue l'equazione (1.14) e quindi μ_f è invariante. $\diamondsuit$

Immediata conseguenza di questo teorema è che la misura μ è invariante se e soltanto se $P1 = 1$.

Esempio 1.4 Consideriamo la trasformazione r-adica $S : [0,1] \to [0,1]$ data da:

$$S(x) = r \cdot x \mod 1 \qquad r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},$$

definita sullo spazio di misura $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$, dove $\mathcal{B}$ è la σ-algebra di Borel e μ la misura di Borel. Generalizzando quando detto nell'esempio 1.2 a proposito della trasformazione diadica, si ricava, per ogni intervallo $[0,x] \subset [0,1]$:

$$S^{-1}([0,x]) = \bigcup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{i}{r}, \frac{i+x}{r}\right],$$

e l'operatore di Frobenius-Perron P corrispondente ad S è dato dalla:

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{r-1} \int_{\frac{i}{r}}^{\frac{i+x}{r}} f(s)ds = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i+x}{r}\right). \tag{1.15}$$

Quindi:

$$P1 = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} 1 = 1.$$

La misura di Borel è perciò invariante sotto l'azione della trasformazione r-adica.

In Fig.1.1 è stata considerata una densità iniziale $f(x) = 6x(1-x)$ unitamente alla sua evoluzione per quattro successive iterazioni, sotto l'azione dell'operatore P associato alla mappa diadica. Si noti la rapida convergenza alla densità $f^*(x) = 1$. $\triangle$

Esempio 1.5 (La trasformazione del panettiere). Sia X il quadrato unitario sul piano che indichiamo con $X = [0,1] \times [0,1]$. La σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ è ora generata da tutti i possibili rettangoli del tipo $[0,a] \times [0,b]$ e la misura di Borel μ è quell'unica misura su $\mathcal{B}$ tale che:

$$\mu([0,a] \times [0,b]) = ab.$$

Definiamo su $(X, \mathcal{B}, \mu)$ la trasformazione (che si dimostra essere misurabile) $S : X \to X$ data da:

$$S(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{per } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{per } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Calcoliamo l'operatore di Frobenius-Perron relativo a questa mappa. Tenendo presente come agisce S sul quadrato unitario $X^{(2)}$, due casi vanno qui distinti:

1. per $0 \le y < \frac{1}{2}$, la controimmagine di un rettangolo $A \in \mathcal{B}$, è:

$$S^{-1}([0,x] \times [0,y]) = [0, \frac{1}{2}x] \times [0, 2y]$$

[2]In termini molto semplici ma efficaci: 'il quadrato viene prima schiacciato fino a veder dimezzata l'altezza e raddoppiata la lunghezza, poi tagliato e le parti risultanti sovrapposte l'una all'altra'.

e, sulla base della (1.8), si ha:

$$\begin{aligned} Pf(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_{S^{-1}([0,x]\times[0,y])} f(s,t)\ ds\ dt = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^{\frac{x}{2}} ds \int_0^{2y} f(s,t)\ dt \\ &= f(\frac{1}{2}x, 2y); \end{aligned}$$

2. per $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, si trova:

$$S^{-1}([0,x]\times[0,y]) = ([0,\frac{1}{2}x]\times[0,1]) \cup ([\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x]\times[0,2y-1]),$$

e quindi:

$$\begin{aligned} Pf(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_{S^{-1}([0,x]\times[0,y])} f(s,t)\ ds\ dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \int_0^{\frac{x}{2}} ds \int_0^1 f(s,t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}} ds \int_0^{2y-1} f(s,t)\ dt \right\} \\ &= f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x, 2y-1). \end{aligned}$$

In conclusione:

$$Pf(x,y) = \begin{cases} f(\frac{1}{2}x, 2y) & \text{per } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \\ f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x, 2y-1) & \text{per } \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases} \tag{1.16}$$

e quindi $P1 = 1$. La misura di Borel è di conseguenza invariante rispetto alla trasformazione del panettiere.

Il modo in cui abbiamo qui derivato l'operatore di Frobenius-Perron non è il più agevole. Poichè la trasformazione in oggetto è invertibile (eccetto che sulla linea $y = \frac{1}{2}$), possiamo in alternativa fare appello alla proposizione 1.6 e scrivere:

$$S^{-1}(x,y) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x, 2y) & \text{per } \ 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x, 2y-1) & \text{per } \ \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \end{cases}$$

e

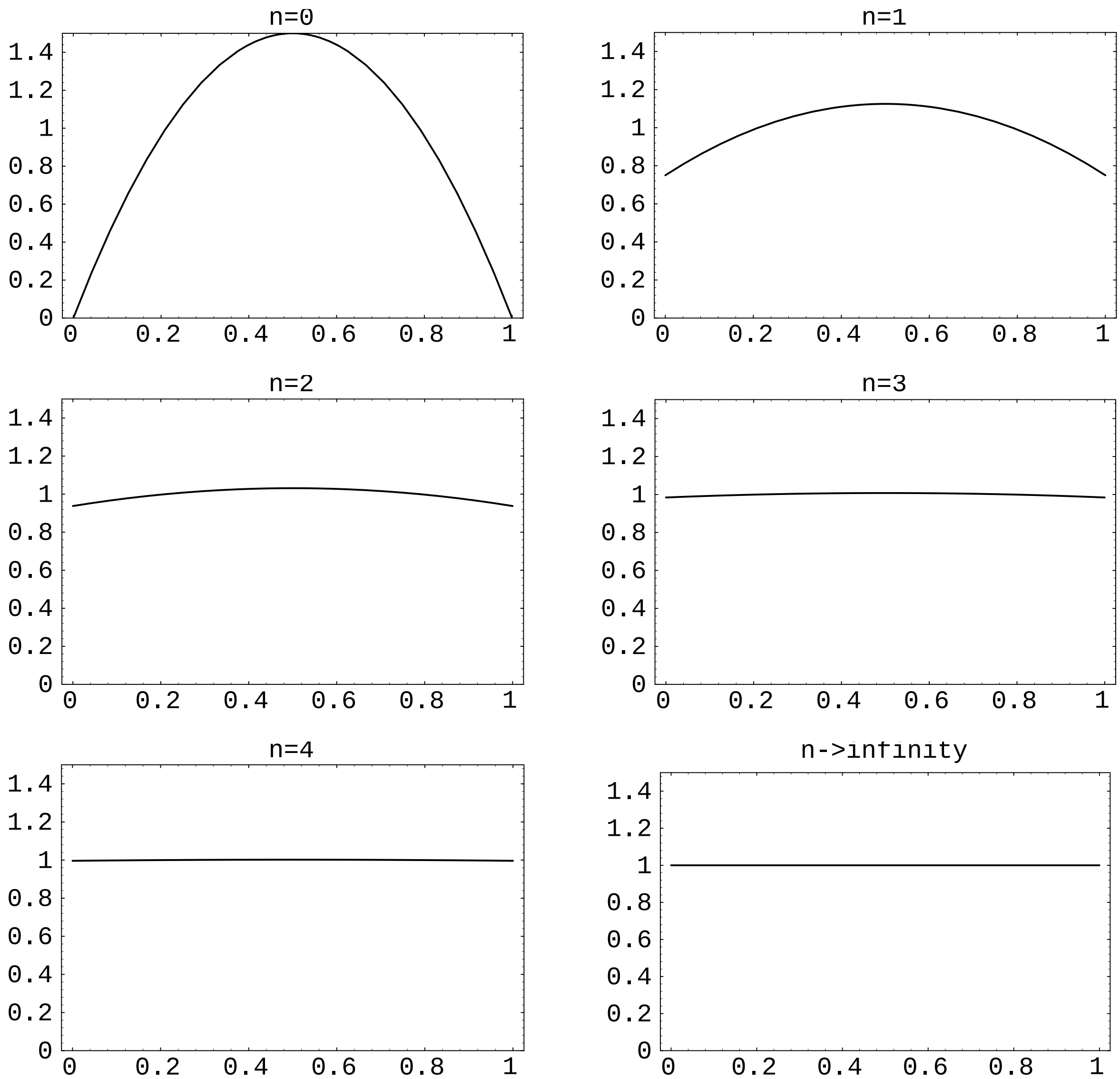
$$J^{-1} = \left| \frac{dS^{-1}(x)}{dx} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

In modo più rapido, si ottiene nuovamente:

$$Pf = f(S^{-1})J^{-1} = \begin{cases} f(\frac{1}{2}x, 2y) & \text{per } \ 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \\ f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x, 2y-1) & \text{per } \ \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

△

Figura 1.1: Mappa diadica: esempio di evoluzione dell'operatore di Frobenius-Perron.



L'applicazione della proposizione 1.6 in questo ultimo esempio è istruttiva: se $S : X \to X$ è una trasformazione non singolare invertibile, la misura μ è invariante rispetto S se $J^{-1} = 1$. Nel caso particolare in cui S è derivabile ed invertibile in $\mathbb{R}^d$, questa condizione equivale a richiedere che la matrice Jacobiana inversa abbia determinante uguale ad 1.

Esempio 1.6 (Gatto di Arnol'd). Prendiamo $X = \mathbb{T}^2 = \{(x, y) \mod 1\}$, μ sia la misura di Lebesgue, e:

$$S(x, y) = (x + y, x + 2y) \mod 1.$$

Si vede subito che S è invertibile, e da un rapido calcolo:

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y, y - x) \qquad \mod 1.$$

Quindi:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad J^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

da cui si ricava che la misura di Lebesgue μ è invariante rispetto S.

Per completezza scriviamo Pf:

$$Pf(x, y) = f(2x - y, y - x),$$

dove i termini $2x - y$ e $y - x$ devono essere interpretati modulo 1. $\triangle$

Concludiamo il paragrafo con un ultimo importante esempio.

Esempio 1.7 Consideriamo ancora una volta lo spazio di misura $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$, dove μ è la misura di Borel. Sia $S : [0, 1] \to [0, 1]$ la mappa quadratica (o logistica):

$$S(x) = 4x(1 - x).$$

Per $[0, x] \subset [0, 1]$ abbiamo:

$$S^{-1}([0, x]) = [\,0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x},\ 1\,],$$

e l'operatore di Frobenius-Perron associato è:

$$Pf(x) = \frac{1}{4\sqrt{1 - x}} \left(f(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}) + f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}) \right).$$

Ovviamente:

$$P1 = \frac{1}{2\sqrt{1 - x}},$$

e quindi μ non è invariante sotto l'azione di S. Per trovare una misura invariante dobbiamo allora individuare una soluzione dell'equazione $Pf = f$:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{1 - x}} \left(f(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}) + f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}) \right).$$

Questo problema è stato risolto da Ulam e Von Neumann [1947], i quali hanno mostrato che la soluzione è:

$$f^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},$$

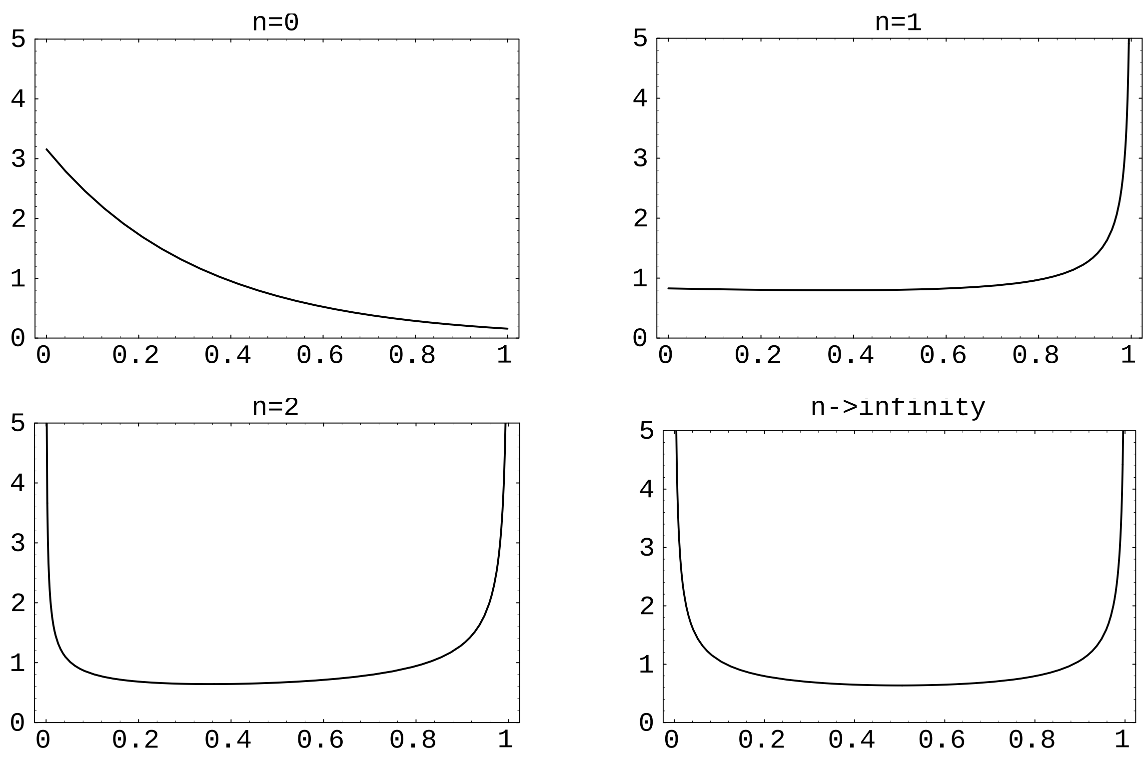
Di conseguenza la misura:

$$\mu_{f^*}(A) = \int_A \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx$$

è invariante rispetto alla mappa S.

In Fig.1.2 è stata considerata una densità iniziale $f(x) = 3 * e^{-3x}/(1-e^{-3})$ unitamente alla sua evoluzione per due successive iterazioni, sotto l'azione dell'operatore P associato alla mappa quadratica. Si noti la rapida convergenza alla densità $f^*(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$. $\triangle$

Figura 1.2: Mappa quadratica: esempio di evoluzione dell'operatore di Frobenius-Perron.



1.2.2 Sistemi ergodici.

Una delle possibili definizioni di sistema dinamico ergodico (nel tempo discreto) è la seguente:

Definizione 1.12 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura ed $S : X \to X$ una mappa non singolare. S viene detta* **ergodica** *se, per ogni funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$, è:*

$$f(S(x)) = f(x) \qquad \text{quasi ovunque su X,}$$

cioè se f è quasi ovunque costante su X.

Congiuntamente alla definizione di operatore di Koopman, da questa definizione si ricava:

Proposizione 1.9 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $S : X \to X$ una mappa non singolare e U l'operatore di Koopman rispetto ad S. S è allora ergodica se e soltanto se tutti i punti fissi di U sono funzioni costanti.*

Omettiamo la dimostrazione in quanto banale.

Un ulteriore (e decisamente più utile) teorema per verificare se S è ergodica, è il seguente:

Teorema 1.4 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $S : X \to X$ una mappa non singolare e P l'operatore di Frobenius-Perron associato ad S. Se S è ergodico, allora esiste al più una densità stazionaria f^* di P. Inoltre, se esiste un'unica densità stazionaria f^* di P tale che $f^*(x) > 0$ quasi ovunque su X, allora S è ergodica.*

Dimostrazione. Per provare la prima parte del teorema assumiamo che S sia ergodica e che f_1 e f_2 siano due diverse densità stazionarie di P. Poniamo $g = f_1 - f_2$, cosicchè $Pg = g$ per la linearità di P. Ecco allora che, per la proposizione 1.3, anche g^+ e g^- sono densità stazionarie di P, cioè $Pg^+ = g^+$ e $Pg^- = g^-$. Inoltre $g^+ \neq 0$ e $g^- \neq 0$. Poniamo ora:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{supp} g^+ = \{x \in X \mid g^+(x) > 0\} \\ B &= \operatorname{supp} g^- = \{x \in X \mid g^-(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Evidentemente A e B sono insiemi disgiunti aventi entrambi misura non nulla. Da quanto sin qui detto e dalla proposizione 1.5, si ricava:

$$A \subset S^{-1}(A) \qquad \text{e} \qquad B \subset S^{-1}(B).$$

Poiché A e B sono disgiunti, anche $S^{-1}(A)$ e $S^{-1}(B)$ sono disgiunti. Per induzione abbiamo quindi:

$$\begin{array}{ll} A & \subset S^{-1}(A) \subset S^{-2}(A) \cdots \subset S^{-n}(A) \\ B & \subset S^{-1}(B) \subset S^{-2}(B) \cdots \subset S^{-n}(B), \end{array}$$

dove $S^{-n}(A)$ e $S^{-n}(B)$ sono disgiunti per ogni n. Definiamo ora:

$$\bar{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(A) \qquad \text{e} \qquad \bar{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(B).$$

Ancora una volta, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono disgiunti e, in più, sono invarianti:

$$\begin{array}{lll} S^{-1}(\bar{A}) & = & \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{-n}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(A) = \bar{A} \\ S^{-1}(\bar{B}) & = & \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{-n}(B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(B) = \bar{B}. \end{array}$$

Ne' $\bar{A}$, ne' $\bar{B}$ sono insiemi di misura nulla in quanto A e B non sono di misura nulla. Allora, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono insiemi invarianti non banali, il che contraddice l'ergodicità di S. Abbiamo così provato la prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte, assumiamo che $f^* > 0$ sia l'unica densità che soddisfa $Pf^* = f^*$, ma che S non sia ergodica. In tal caso esiste allora un insieme non banale A tale che: $S^{-1}(A) = A$ e $S^{-1}(B) = B$, dove $B = X \setminus A$. Con questi due insiemi A e B, possiamo scrivere $f^* = \chi_A f^* + \chi_B f^*$, e:

$$f^* = \chi_A f^* + \chi_B f^* = Pf^* = P(\chi_A f^*) + P(\chi_B f^*). \tag{1.17}$$

La funzione $\chi_B f^*$ è pari a zero sull'insieme $X \setminus B = A = S^{-1}(A)$. Per la proposizione 1.5, $P(\chi_B f^*)$ è nulla su $A = X \setminus B$. In modo analogo, $P(\chi_A f^*)$ è nulla su $B = X \setminus A$. Dalla relazione (1.17) segue allora:

$$\chi_A f^* = P(\chi_A f^*) \qquad \text{e} \qquad \chi_B f^* = P(\chi_B f^*).$$

Essendo f^* per ipotesi positiva su A e B, sostituiamo $\chi_A f^*$ con $f_A = \chi_A f^*/||\chi_A f^*||$, e $\chi_B f^*$ con $f_B = \chi_B f^*/||\chi_B f^*||$ nelle due ultime uguaglianze sopra scritte, ottenendo:

$$f_A = Pf_A \qquad \text{e} \qquad f_B = Pf_B.$$

Questo significa che esistono due densità stazionarie di P, il che contraddice l'assunzione. Se dunque vi è un'unica densità stazionaria positiva f^* di P, S è ergodica. $\diamondsuit$

Il teorema che segue non lo dimostreremo in quanto presuppone la conoscenza di strumenti che esulano dalla presente trattazione; esso si mostrerà però particolarmente utile nel paragrafo 1.2.4.

Teorema 1.5 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $P : L^1 \to L^1$ un operatore di Markov con un'unica densità stazionaria f^*. Se $f^*(x) > 0$ per ogni $x \in X$, allora:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = f^* \qquad \forall\ f \in D. \tag{1.18}$$

1.2.3 Sistemi esatti.

Definizione 1.13 *Sia $(x, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura normalizzato, ed $S : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura, tale che $S(A) \in \mathcal{A}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Se:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S^n(A)) = 1 \qquad \forall\ A \in \mathcal{A},\ \mu(A) > 0, \tag{1.19}$$

allora S è detta **esatta***.*

Si può dimostrare, anche se non è per nulla facile farlo a partire dalla definizione, che se S è esatta è anche mescolante. L'inverso non è però vero.

La condizione (1.19) ha una interpretazione molto semplice: se partiamo con un insieme A di condizioni iniziali di misura non nulla, allora, dopo un grande numero di iterazioni di una trasformazione esatta S, i punti si saranno sparpagliati su X e lo avranno riempito completamente.

Va sottolineato che le trasformazioni invertibili non possono essere esatte. Infatti, per qualsiasi mappa invertibile S che preserva la misura, abbiamo $\mu(S(A)) = \mu(S^{-1}(S(A))) = \mu(A)$, da cui, per induzione, $\mu(S^n(A)) = \mu(A)$, la quale vìola la (1.19).

1.2.4 Classificazione dei sistemi dinamici con gli operatori di Frobenius-Perron e Koopman.

Scopo di questo paragrafo è di riformulare le nozioni di ergodicità , mescolamento ed esattezza in termini del comportamento delle sequenze di iterate degli operatori di Frobenius-Perron e Koopman, e mostrare come queste possono essere utilizzate per determinare se una data trasformazione S con una misura invariante è ergodica, mescolante o esatta. Le tecniche in questione si basano sulle nozioni di convergenza nel senso di Cesaro, di convergenza debole e forte.

Un fondamentale risultato è il seguente:

Teorema 1.6 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura normalizzato, $S : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura, e P l'operatore di Frobenius-Perron corrispondente ad S. Allora:*

1. *S è ergodica se e soltanto se la sequenza $\{P^n f\}$ è Cesaro-convergente ad 1, per ogni $f \in D$; cioè S è ergodica se e soltanto se* [3]*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^k f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \qquad \forall \ f \in L^1, \ g \in L^\infty; \tag{1.20}$$

2. *S è mescolante se e soltanto se la sequenza $\{P^n f\}$ è debolmente convergente ad 1, per ogni $f \in D$; cioè S è mescolante se e soltanto se :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle P^n f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \qquad \forall \ f \in L^1, \ g \in L^\infty; \tag{1.21}$$

3. *S è esatta se e soltanto se la sequenza $\{P^n f\}$ è fortemente convergente ad 1, per ogni $f \in D$; cioè S è esatta se e soltanto se :*

$$\lim_{n\to\infty} ||P^n f - \langle f, 1\rangle|| = 0 \qquad \forall \ f \in L^1. \tag{1.22}$$

Dimostrazione.

Per quanto riguarda il punto 1), sarà sufficiente dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = 1 \qquad \forall \ f \in D, \tag{1.23}$$

dato che da essa deriva la (1.20). Infatti da (1.23) segue che, per $f \in L^1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k (f^+ - f^-) \\ &= ||f^+|| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k (\frac{f^+}{||f^+||}) - ||f^-|| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k (\frac{f^-}{||f^-||}) \\ &= ||f^+|| - ||f^-|| = \int_X (f^+ - f^-)\, d\mu = \langle f, 1\rangle. \end{aligned}$$

Se $g \in L^\infty$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^k f, g\rangle &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X (P^k f \cdot g)\, d\mu \\ &= \int_X (\langle f, 1\rangle \cdot g)\, d\mu = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle. \end{aligned}$$

La dimostrazione della (1.23) è immediata. Se S preserva la misura, allora $P1 = 1$. Se S è ergodica, allora, per il teorema 1.4, $f^* = 1$ è l'unica densità stazionaria di P e, per il

[3] Si ricordi che f è una densità e quindi $f \geq 0$, $||f|| = \int_X f\, d\mu = \langle f, 1\rangle = 1$. La convergenza di $\{P^n f\}$ ad 1 per $f \in D$ è perciò equivalente alla convergenza di $\{P^n f\}$ a $\langle f, 1\rangle$, per ogni $f \in L^1$. Questo è vero per ogni tipo di convergenza: nel senso di Cesaro, debole e forte.

teorema 1.5, segue la convergenza della (1.23). Al contrario, se vale la (1.23), applicando questa relazione ad una densità stazionaria f, si ottiene $f = 1$. Allora $f^* = 1$ è l'unica densità stazionaria di P e nuovamente, per il teorema 1.4, la trasformazione S è ergodica.

Consideriamo ora la parte del teorema relativa alla proprietà di mescolamento. Se S è mescolante, significa che:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \qquad \forall\ A, B \in \mathcal{A},$$

che può essere riscritta nella forma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_A \cdot \chi_B(S^n)\, d\mu = \int_X \chi_A\, d\mu \int_X \chi_B\, d\mu.$$

Applicando le definizioni di operatore di Koopman e di prodotto scalare a quest'ultima relazione, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \langle \chi_A, U^n \chi_B \rangle = \langle \chi_A, 1 \rangle \langle 1, \chi_B \rangle.$$

Ricordando che l'operatore di Koopman è coniugato all'operatore di Frobenius-Perron, possiamo riscrivere quest'ultima uguaglianza:

$$\lim_{n\to\infty} \langle P^n \chi_A, \chi_B \rangle = \langle \chi_A, 1 \rangle \langle 1, \chi_B \rangle,$$

o:

$$\lim_{n\to\infty} \langle P^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle,$$

per $f = \chi_A$ e per $g = \chi_B$. Dato che questa relazione vale per funzioni caratteristiche, essa deve valere anche per funzioni semplici, essendo queste combinazioni lineari di funzioni caratteristiche. Inoltre ogni funzione $g \in L^\infty$ è il limite uniforme di funzioni semplici $g_k \in L^\infty$, mentre ogni funzione $f \in L^1$ è il limite forte (nella norma L^1) di una sequenza di funzioni semplici $f_k \in L^1$. Ovviamente:

$$\begin{aligned} |\langle P^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle| \ &\le\ |\langle P^n f, g \rangle - \langle P^n f_k, g_k \rangle| \\ &+\ |\langle P^n f_k, g_k \rangle - \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle| \\ &+\ |\langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle|. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Tenendo conto che $|g| \le ||g||_{L^\infty}$, che per ogni funzione $f \in L^1$ è:

$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \le \int_A |f|\, d\mu \qquad \forall\ A \in \mathcal{A},$$

che per ogni operatore di Frobenius-Perron $||Pf|| \le ||f||$, $f \in L^1$, che (per ipotesi) $||f_k - f|| \le \varepsilon$ e $||g_k - g||_{L^\infty} \le \varepsilon$ (e quindi $||f_k|| = ||f_k - f + f|| \le ||f_k - f|| + ||f|| \le \varepsilon + ||f||$), il primo termine a destra della (1.24) soddisfa:

$$|\langle P^n f, g \rangle - \langle P^n f_k, g_k \rangle| \ \le\ |\langle P^n f, g \rangle - \langle P^n f_k, g \rangle| + |\langle P^n f_k, g \rangle - \langle P^n f_k, g_k \rangle|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_X P^n(f-f_k)g\,d\mu\right| + \left|\int_X P^n f_k(g-g_k)\,d\mu\right| \\
&\leq ||g||_{L^\infty}\left|\int_X P^n(f-f_k)\,d\mu\right| + ||g-g_k||_{L^\infty}\left|\int_X P^n f_k\,d\mu\right| \\
&\leq ||g||_{L^\infty}\int_X |P^n(f-f_k)|\,d\mu + ||g-g_k||_{L^\infty}\int_X |P^n f_k|\,d\mu \\
&= ||g||_{L^\infty}||P^n(f-f_k)|| + ||g-g_k||_{L^\infty}||P^n f_k|| \\
&\leq ||g||_{L^\infty}||f-f_k|| + ||g-g_k||_{L^\infty}||f_k|| \\
&\leq \varepsilon||g||_{L^\infty} + \varepsilon||f_k|| \leq \varepsilon(||g||_{L^\infty} + ||f|| + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Analogamente l'ultimo termine a destra della (1.24) soddisfa:

$$|\langle f_k, 1\rangle\langle 1, g_k\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle| \leq \varepsilon(||g||_{L^\infty} + ||f|| + \varepsilon).$$

Questi termini sono quindi arbitrariamente piccoli per valori arbitrariamente piccoli di ε. Per concludere, per k fissato, il termine centrale di destra della (1.24):

$$|\langle P^n f_k, g_k\rangle - \langle f_k, 1\rangle\langle 1, g_k\rangle|$$

converge a zero per $n \to \infty$, il che dimostra che l'intero termine di destra della disuguaglianza (1.24) può essere piccolo quanto si vuole per n grande. Ciò completa la dimostrazione che la proprietà di mescolamento implica la convergenza di $\langle P^n f, g\rangle$ a $\langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle$, per ogni $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$. Al contrario, la convergenza implica la condizione di mescolamento se poniamo $f = \chi_A$ e $g = \chi_B$.

Da ultimo mostriamo che la convergenza forte di $\{P^n f\}$ a $\langle f, 1\rangle$ implica l'esattezza. Assumiamo $\mu(A) > 0$ e definiamo:

$$f_A(x) = \frac{1}{\mu(A)}\chi_A(x).$$

Chiaramente f_A è una densità. Definita la sequenza $\{r_n\}$:

$$r_n = ||P^n f_A - 1||,$$

è altrettanto chiaro che essa converge a zero, ed abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mu(S^n(A)) &= \int_{S^n(A)} d\mu = \int_{S^n(A)} P^n f_A\,d\mu - \int_{S^n(A)} (P^n f_A - 1)\,d\mu \\
&\geq \int_{S^n(A)} P^n f_A\,d\mu - \int_X |P^n f_A - 1|\,d\mu = \int_{S^n(A)} P^n f_A\,d\mu - r_n.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di operatore di Frobenius-Perron:

$$\int_{S^n(A)} P^n f_A\,d\mu = \int_{S^{-n}(S^n(A))} f_A\,d\mu.$$

Dato che $S^{-n}(S^n(A))$ contiene A, l'ultimo integrale è pari a 1 e quindi:

$$\mu(S^n(A)) \geq 1 - r_n.$$

È in tal modo completata la dimostrazione che la convergenza di $\{P^n f\}$ a $\langle f, 1\rangle$ implica l'esattezza. Omettiamo la dimostrazione della proposizione inversa (l'esattezza di S implica la convergenza in senso forte di $\{P^n f\}$ a $\langle f, 1\rangle$), dato che la sua dimostrazione è basata su tecniche del tutto differenti ed inoltre noi non faremo mai uso di essa. $\diamondsuit$

Poiché gli operatori di Koopman e di Frobenius-Perron sono coniugati, è possibile riscrivere le condizioni (1.20) e (1.21) in termini dell'operatore di Koopman. Il vantaggio di una simile riformulazione sta nel fatto che l'operatore di Koopman è più facile da calcolare rispetto a quello di Frobebius-Perron. Sfortunatamente, questa riformulazione non può essere estesa alla condizione (1.22) poichè essa non è espressa in termini di prodotto scalare.

Proposizione 1.10 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura normalizzato, $S : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura, ed U l'operatore di Koopman corrispondente ad S. Allora:*

1. *S è ergodica se e soltanto se :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, U^k g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \qquad \forall\ f \in L^1,\ g \in L^\infty; \tag{1.25}$$

2. *S è mescolante se e soltanto se :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, U^n g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \qquad \forall\ f \in L^1,\ g \in L^\infty. \tag{1.26}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto banale in quanto sappiamo che:

$$\langle f, U^n g\rangle = \langle P^n f, g\rangle \qquad \forall\ f \in L^1,\ g \in L^\infty,\ n = 1, 2, \ldots$$

$\diamondsuit$

Il teorema 1.6 e la proposizione 1.10 sono state formulate in termini di spazi L^1 ed L^∞ allo scopo di sottolineare il ruolo dell'operatore di Frobenius-Perron come trasformazione di densità. Il medesimo risultato può essere provato utilizzando spazi coniugati L^p e L^{p*}, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, invece di L^1 e L^∞. Oltre a ciò, quando si vanno a verificare le condizioni 1) 2) 3) del teorema 1.6 o le condizioni 1) 2) della proposizione 1.10, non è necessario verificare la loro validità per ogni $f \in L^p$ e $g \in L^{p^*}$. Per le speciali proprietà degli operatori P ed U, che sono contrazioni lineari, è sufficiente verificare queste condizioni per f e g appartenenti rispettivamente a sottoinsiemi linearmente densi di L^p ed L^{p^*}.

Ricordiamo che:

Definizione 1.14 *Un sottoinsieme $K \subset L^p$ è detto* **linearmente denso** *se, per ogni $f \in L^p$ ed ε, esistono $g_1, \ldots, g_n \in K$ e costanti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tali che:*

$$||f - g||_{L^p} < \varepsilon, \qquad \text{dove} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i.$$

Usando la nozione di insiemi linearmente densi, è in generale possibile semplificare la dimostrazione della convergenza debole. Se la sequenza $\{f_n\}$ è limitata in norma, cioè $||f_n||_{L^p} \leq c < \infty$, e se K è linearmente denso in L^{p^*}, allora è sufficiente verificare la convergenza debole per ogni $g \in K$.

È noto che nello spazio $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$ i seguenti insiemi sono linearmente densi:

1. K_1={ Insieme di funzioni caratteristiche χ_A dell'insieme di Borel $A \subset [0,1]$.};
2. K_2={ Insieme di funzioni continue su $[0,1]$.};
3. K_3=$\{\sin(n\pi x); n = 1, 2 \ldots\}$.

Esempio 1.8 Vogliamo qui mostrare che la mappa r-adica:

$$S(x) = r \cdot x \qquad \text{mod } 1 \qquad r = 2, 3, \ldots$$

è esatta.

Abbiamo già detto che è sufficiente dimostrare che $\{P^n f\}$ converge in modo forte a $\langle f, 1 \rangle$, per f nell'insieme linearmente denso K in $L^p([0,1])$. Assumiamo $K = K_2$, cioè prendiamo l'insieme linearmente denso di funzioni continue su $[0,1]$.

Già abbiamo visto che:

$$Pf(x) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} f\left(\frac{k+x}{r}\right),$$

da cui:

$$\begin{aligned}
P^2 f = P(Pf(x)) &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} Pf\left(\frac{k+x}{r}\right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} f\left(\frac{k + \frac{j+x}{r}}{r}\right)\right) \\
&= \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} f\left(\frac{kr + j + x}{r^2}\right),
\end{aligned}$$

ponendo $i = kr + j$:

$$P^2 f = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^{r^2-1} f\left(\frac{i+x}{r^2}\right).$$

Per induzione:

$$P^n f = \frac{1}{r^n}\sum_{i=0}^{r^n-1} f\left(\frac{i}{r^n}+\frac{x}{r^n}\right).$$

Per $n \to \infty$ la parte a destra dell'ultima equazione scritta tende all'integrale di Riemann di f su $[0,1]$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} P^n f(x) = \int_0^1 f(s)ds = \langle f, 1\rangle, \qquad \text{uniformemente in } x.$$

È così dimostrato che S è esatta. $\triangle$

Esempio 1.9 (Traslazione su $\mathbb{T}^1$) Prendiamo:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{T}^1 = \{x \mod 1\} \\ \mu &= \text{misura di Lebesgue} \\ S(x) &= x+\alpha \mod 1 \end{aligned}$$

Chiaramente S preserva la misura μ. Vogliamo provare che S è ergodica quando α è irrazionale.

Come insieme linearmente denso in $L^{p^*}([0,1])$ prendiamo quello costituito dalle funzioni $\{\sin 2k\pi x, \cos 2k\pi x : k, l = 0, 1, \ldots\}$. Ciò che dobbiamo in sostanza provare è che, per ogni funzione g appartenente a questo insieme,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g(x) = \langle 1, g\rangle, \tag{1.27}$$

uniformemente per ogni x, la quale a sua volta implica che la condizione (1.25) della proposizione 1.10 è soddisfatta per ogni f. Per semplificare i calcoli, osserviamo che:

$$\sin 2k\pi x = \frac{e^{i2k\pi x} - e^{-i2k\pi x}}{2i}, \qquad \cos 2k\pi x = \frac{e^{2ik\pi x} + e^{-2ik\pi x}}{2}.$$

Di conseguenza è sufficiente verificare la (1.27) solo per $g(x) = e^{i2k\pi x}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Per $k \neq 0$ abbiamo:

$$U^l g(x) = g(S^l(x)) = e^{i2k\pi(x+l\alpha)},$$

cosicchè:

$$u_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} U^l g(x) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} e^{i2k\pi(x+l\alpha)} = \frac{1}{n} e^{i2k\pi x}\frac{e^{in2k\pi\alpha}-1}{e^{i2k\pi\alpha}-1},$$

e:

$$||u_n(x)||_{L^2} = \frac{|e^{in2k\pi\alpha}-1|}{n|e^{i2k\pi\alpha}-1|}\left\{\int_0^1 |e^{i2k\pi x}|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{|e^{in2k\pi\alpha}-1|}{n|e^{i2k\pi\alpha}-1|}\left\{\int_0^1 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{n|e^{i2k\pi\alpha}-1|}.$$

Quindi $\{u_n(x)\}$ converge a zero in L^2. Data la nostra scelta di g, è anche:

$$\langle 1, g \rangle = \int_0^1 e^{i2k\pi x} dx = \frac{1}{i2k\pi}[e^{i2k\pi} - 1] = 0,$$

e quindi la condizione (1.25) è soddisfatta per $k \neq 0$.

Per $k = 0$ i calcoli sono ancora più semplici, poichè $g(x) = 1$ e quindi $u_n(x) = 1$. Inoltre:

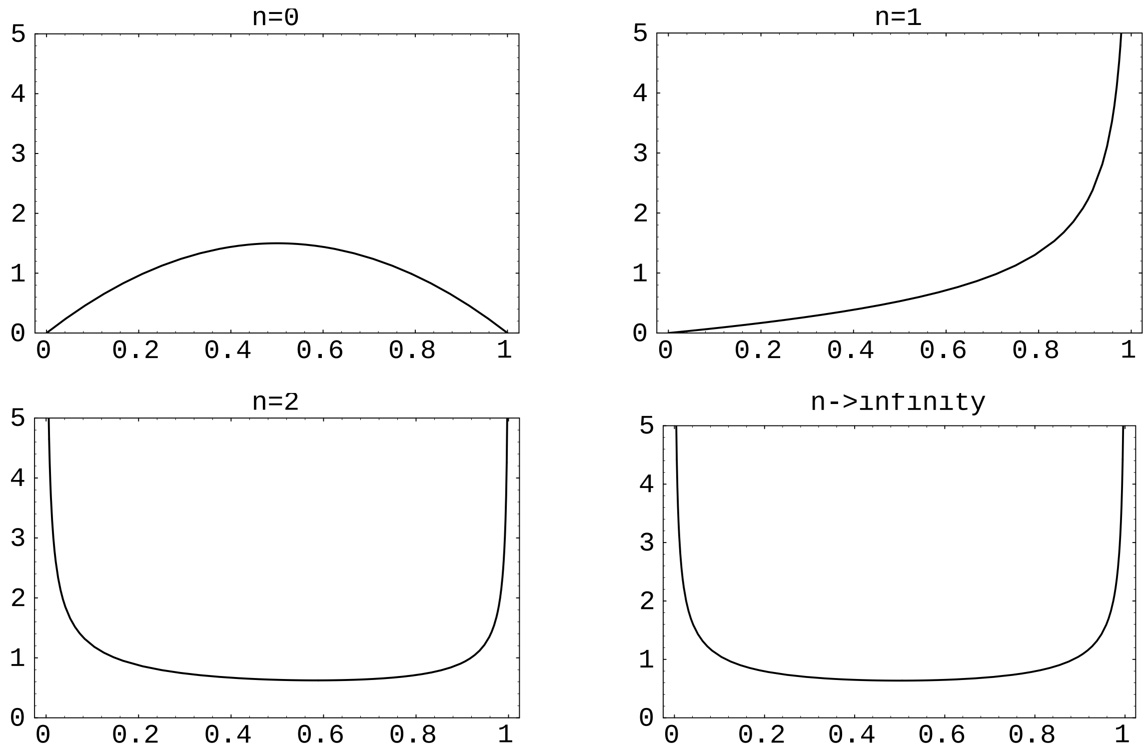
$$\langle 1, g \rangle = \int_0^1 dx = 1,$$

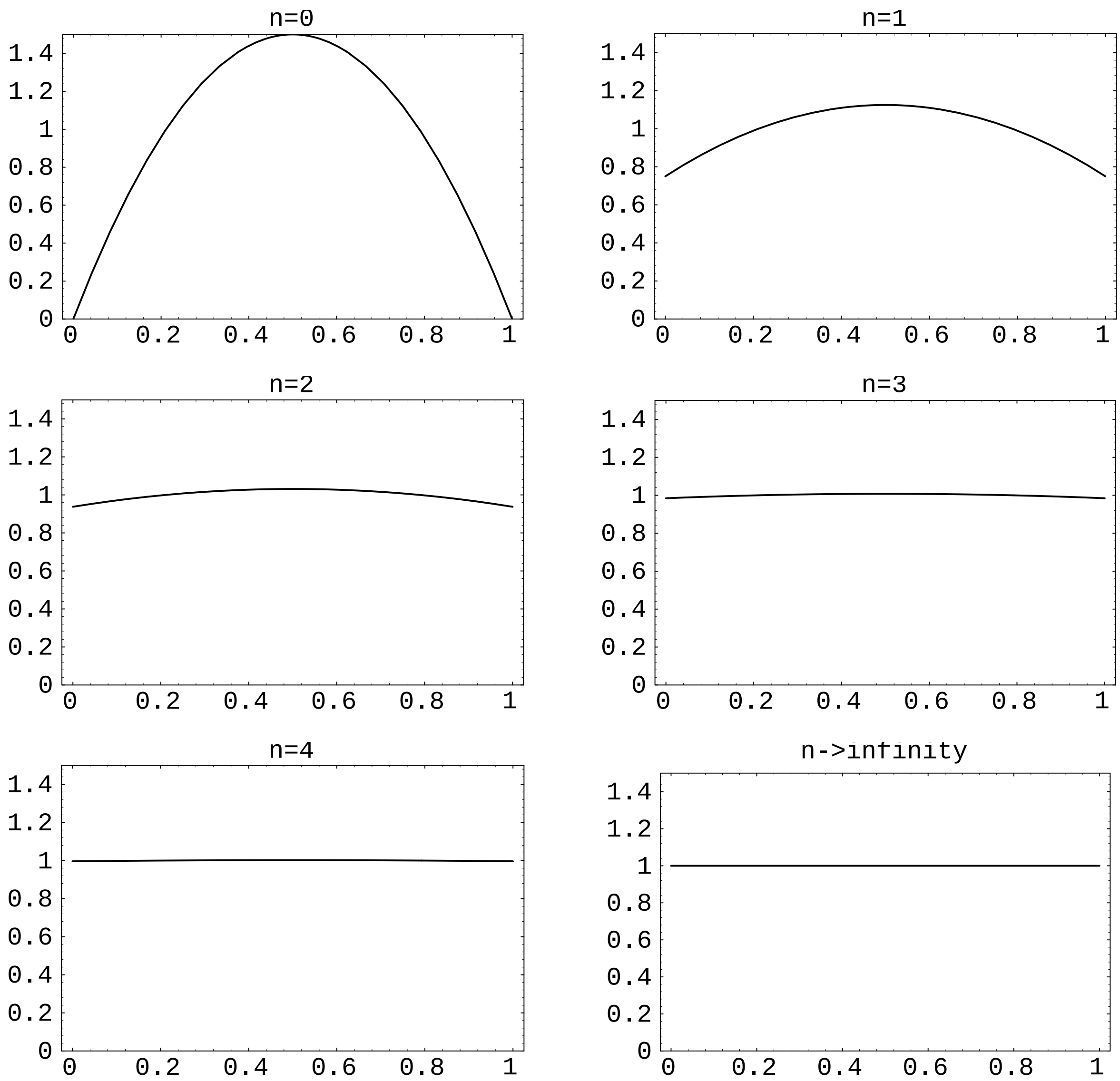
perciò $\{u_n(x)\}$ converge ancora una volta a $\langle 1, g \rangle$. $\triangle$

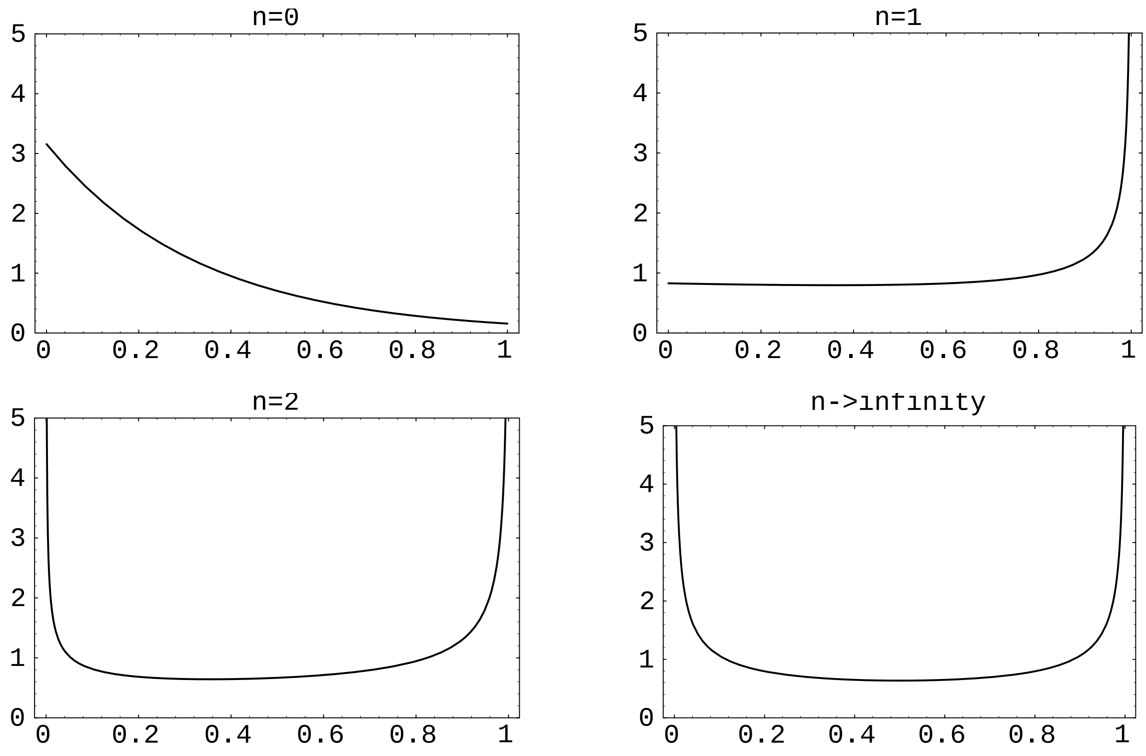
In questa sezione abbiamo mostrato in che modo lo studio dell'ergodicità , del mescolamento e dell'esattezza di una trasformazione S può essere semplificato grazie all'uso dell'operatore di Frobenius-Perron associato ad S. Poichè l'operatore di Frobenius-Perron è un tipo speciale di operatore di Markov, è logico estendere le nozioni sopradette ai più generali operatori di Markov. Chiudiamo quindi la sezione con la seguente definizione.

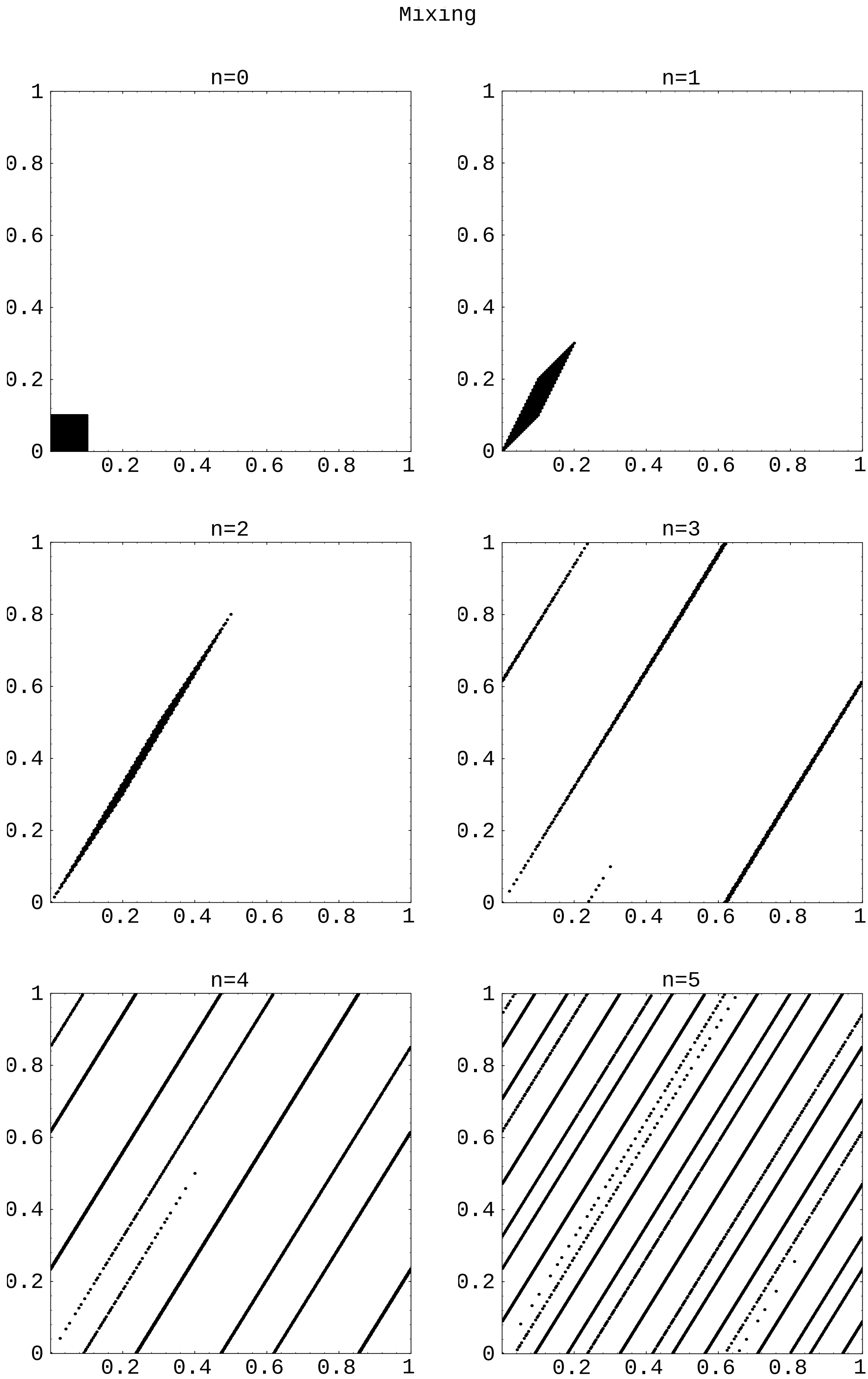
Definizione 1.15 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura normalizzato e $P : L^1 \to L^1$ un operatore di Markov con la densità stazionaria 1, cioè $P1 = 1$. Diciamo allora che:*

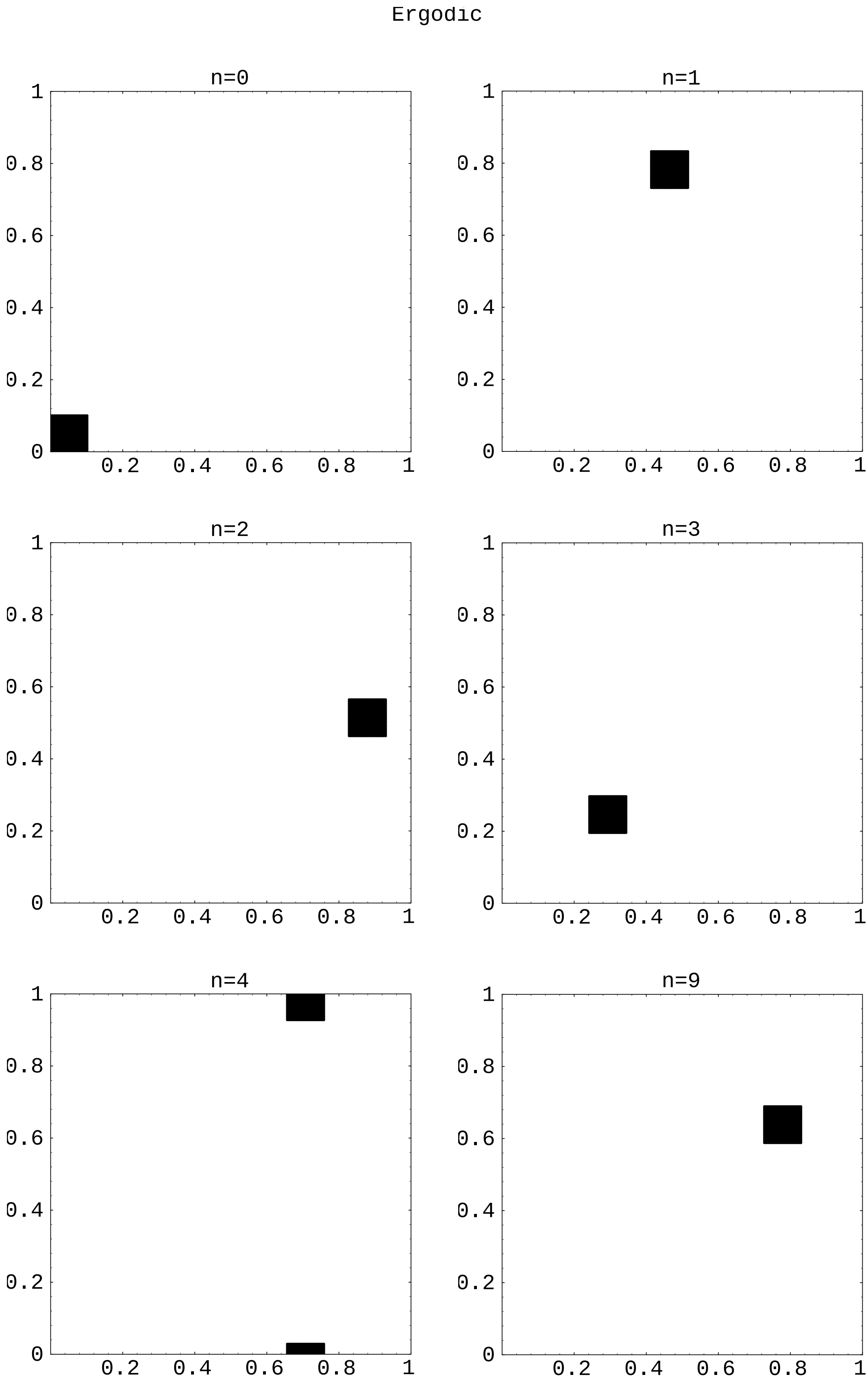
1. *P è ergodico se la sequenza $\{P^n f\}$ è Cesaro-convergente ad 1, per ogni $f \in D$;*
2. *P è mescolante se la sequenza $\{P^n f\}$ è debolmente convergente ad 1, per ogni $f \in D$;*
3. *P è esatto se la sequenza $\{P^n f\}$ è fortemente convergente ad 1, per ogni $f \in D$;*

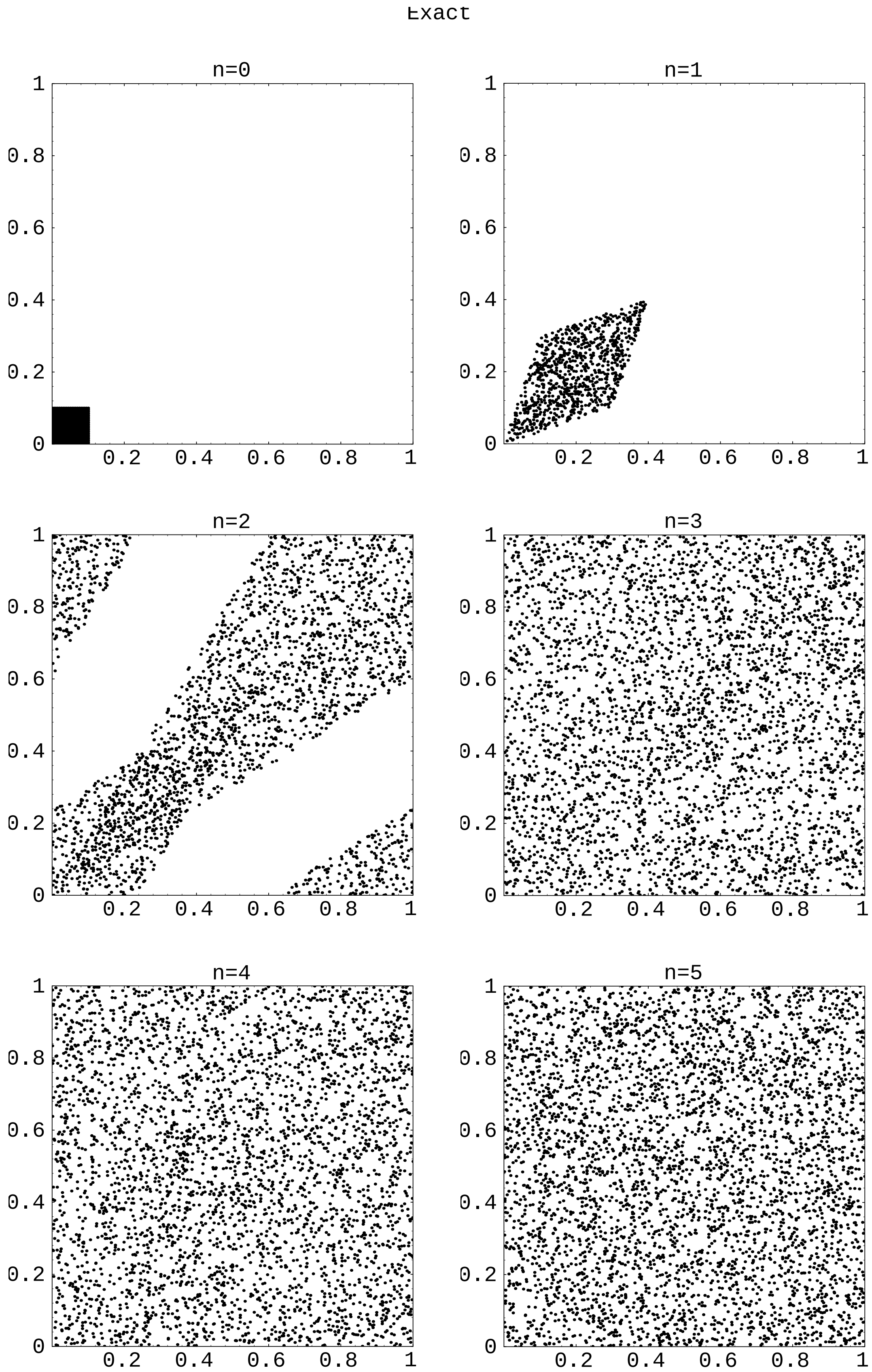

n=0
n=1
n=2
n->infinity
0
1
2
3
4
5
0.2
0.4
0.6
0.8


n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n->infinity
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4


n=0
n=1
n=2
n->infinity
0
1
2
3
4
5
0.2
0.4
0.6
0.8


Mixing
n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Ergodic
n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n=9
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Exact
n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1