Marco Sandri

Dottorato di Ricerca in
Matematica Applicata alle Decisioni Economiche
dell' Università di Trieste

Modelli con orizzonte infinito
Modelli con generazioni sovrapposte

Università di Verona

VERONA

Capitolo 1

Consumo e investimenti: i principali modelli con orizzonte temporale infinito.

1.1 Il modello di Ramsey.

Consideriamo un insieme di famiglie identiche fra loro il cui numero cresce nel tempo secondo la legge:

$$N_t = N_0 e^{nt},$$

cioè al tasso costante:

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} = \frac{dN_t/dt}{N_t} = \frac{N_0 e^{nt} n}{N_0 e^{nt}} = n.$$

La forza lavoro si suppone coincida con la popolazione e quindi l'offerta di lavoro è inelastica. La produzione richiede lavoro e capitale K. La produttività si assume costante nel tempo.

Il prodotto può essere consumato od investito, cioè aggiunto allo stock di capitale esistente:

$$Y_t = F(N_t, K_t) = C_t + \dot{K}_t,$$

dove $\dot{K} = dK/dt$. Per semplicità assumiamo che il capitale non sia soggetto ad usura e che la funzione di produzione sia omogenea di grado $1^{(1)}$, ossia i rendimenti di scala sono costanti.

[1]Sia data la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, con $f(\beta) = \alpha$, dove $A \subset \mathbb{R}^n$ è tale che, se $\mathbf{x} \in A$, anche $\beta + t(\mathbf{x} - \beta) \in A$. Si dice allora che f è positivamente omogenea di grado p rispetto al centro di omogeneità (β, α), se si ha:

$$f(\beta + \gamma(\mathbf{x} - \beta)) - \alpha = \gamma^p (f(\mathbf{x}) - \alpha). \qquad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

Nel nostro caso assumiamo che F sia omogenea di grado 1 nel centro di omogeneità $(0, 0)$:

$$F(\gamma N_t, \gamma K_t) = \gamma F(N_t, K_t) \qquad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},$$

il che implica:

$$F(N_t, K_t) = N_t F(1, \frac{K_t}{N_t}) = N_t f(k_t).$$

Ricordando che:

$$\dot{k}_t = \frac{d}{dt}\left(\frac{K_t}{N_t}\right) = \frac{\dot{K}_t N_t - K_t \dot{N}_t}{N_t^2} = \frac{\dot{K}_t N_t - K_t N_t n}{N_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - nk_t,$$

in termini pro capite:

$$f(k_t) = \frac{F(N_t, K_t)}{N_t} = \frac{C_t + \dot{K}_t}{N_t} = c_t + \dot{k}_t + nk_t, \tag{1.1}$$

dove le lettere minuscole indicano i valori pro-capite.

Assumiamo poi che la funzione $f(\cdot)$ sia strettamente concava, $f''(k) < 0$ per ogni $k > 0$, e che soddisfi le condizioni $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$, $f'(\infty) = 0$. Ipotizziamo inoltre che l'economia possieda una dotazione iniziale di capitale tale da consentire l'avvio del processo produttivo: $k_0 > 0$. Le preferenze delle famiglie relative al consumo nel corso del tempo sono rappresentate dalla seguente funzione integrale di utilità (funzione di 'benessere') che esprime il valore attuale (al tempo s) della somma delle utilità istantanee $u(c_t)$:

$$U_s = \int_s^\infty u(c_t) e^{-\theta(t-s)} dt \tag{1.2}$$

La funzione $u(\cdot)$ è nota come funzione di utilità istantanea, o 'felicita'. Si suppone che $u(\cdot)$ sia non negativa, crescente e concava in relazione al livello di consumo pro-capite dei membri della famiglia: $u(c) > 0$, $u'(c) \geq 0$ e $u''(c) < 0$ per ogni $c > 0$. Il tasso θ è il tasso di preferenza temporale, o tasso di sconto soggettivo, che ipotizziamo essere strettamente positivo: $0 < \theta \leq 1$.

1.1.1 L'economia pianificata

Supponiamo per il momento che esista un pianificatore centrale il quale desidera massimizzare al tempo t=0 il benessere di ogni singola famiglia. Egli dovrà decidere per ogni istante quanto la famiglia deve consumare e quanto deve invece aggiungere allo stock di capitale per assicurarsi il consumo futuro. Il problema che deve risolvere è pertanto:

$$\max U_0 = \int_0^\infty u(c_t) e^{-\theta t} dt \tag{1.3}$$

sotto i vincoli:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t \qquad \text{(equazione di transizione)} \tag{1.4}$$

La funzione di produzione del tipo Cobb-Douglas:

$$F(N_t, K_t) = cN_t^p K_t^{1-p} \qquad \text{con} \quad 0 < p < 1,$$

è un esempio di funzione omogenea di primo grado. Infatti:

$$F(N_t, K_t) = N_t \cdot (cN_t^{p-1} K_t^{1-p}) = N_t \cdot c \cdot \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{1-p} = N_t c k_t^{1-p} = N_t f(k_t).$$

$$k_0 > 0 \quad \text{dato} \tag{1.5}$$
$$k_t, c_t \geq 0 \quad \forall\ t \tag{1.6}$$
$$u(c) > 0, u'(c) \geq 0, u''(c) < 0 \quad \forall\ c > 0 \tag{1.7}$$
$$f(0) = 0, f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0 \tag{1.8}$$
$$f''(k) < 0 \quad \forall\ k > 0. \tag{1.9}$$

L'Hamiltoniano associato al problema è :

$$H(c_t, k_t, \lambda_t) = u(c_t)e^{-\theta t} + \lambda_t(f(k_t) - nk_t - c_t).$$

Evitiamo di imporre esplicitamente i vincoli di segno (1.6) sulla variabile di stato k_t e sulla variabile di controllo c_t. Vale allora la seguente proposizione:

Proposizione 1.1 *Sotto le ipotesi (1.5), (1.7), (1.8), (1.9), un sentiero (k_t^*, c_t^*) è ottimo per il problema (1.3) se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}(k_t, c_t, \lambda_t, t) = 0 \tag{1.10}$$
$$-\frac{\partial H}{\partial k_t}(k_t, c_t, \lambda_t, t) = \dot{\lambda}_t \tag{1.11}$$
$$\lim_{t\to\infty} k_t\lambda_t = 0. \tag{1.12}$$

Dimostrazione.

1. (Necessità) Per quanto concerne le condizioni (1.10) e (1.11), queste sono le classiche equazioni canoniche del teorema del massimo, quindi la loro necessità è ovvia. Per quanto riguarda invece la terza condizione, che rappresenta la condizione di trasversalità del problema, ricorriamo al corollario (2.1) riportato nell'appendice (A.2). Per $r > 0$, dimostreremo nelle pagine che seguono che la soluzione ottimale k_t^* converge alla cosiddetta *golden rule modificata* definita da $f'(k^*) = r + n$ (vedi pag. 9). L'insieme 'delle possibili velocità' $\{f(k^*, c) : 0 \leq c \leq f(k^*)\}$ è in questo caso l'intervallo $[-nk^*, f(k^*) - nk^*]$ che è chiaramente un intorno di 0. Per continuità, le ipotesi del corollario sono verificate e quindi $\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_t^* = 0$ è condizione necessaria per il problema.

2. (Sufficienza) Per le condizioni (1.7) e (1.9), l'hamiltoniano è concavo in (k_t, c_t), quindi può essere applicato il teorema (2.1) dell'appendice (A.2) ed è verificata la (2.113). Le condizioni (1.10), (1.11) coincidono rispettivamente con la (2.111) e la (2.112) del teorema. Si tenga poi conto che l'equazione di transizione (1.4) impone che tutte le traiettorie ammissibili non possano avere andamento esplosivo (vedi anche Fig. 1.1). È quindi garantito che $\exists Q > 0 : |k_t| < Q\ \forall t \in [0, \infty]$.

   La (2.117) è allora verificata e con essa la (2.114). Le condizioni (1.10), (1.11) e (1.12) sono pertanto sufficienti per il nostro problema di ottimizzazione.

Servendoci della definizione di $H(\cdot)$ e definendo $\mu_t = \lambda_t e^{\theta t}$, le condizioni (1.10), (1.11), (1.12) diventano rispettivamente:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{du}{dc_t} e^{-\theta t} - \lambda_t = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad u'(c_t) = \mu_t;$$

$$\dot{\mu}_t = \dot{\lambda}_t e^{\theta t} + \lambda_t \theta e^{\theta t} = -\frac{\partial H}{\partial k_t} e^{\theta t} + \mu_t \theta = -\lambda_t (f'(k_t) - n) e^{\theta t} + \mu_t \theta = \mu_t (\theta + n - f'(k_t));$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t \mu_t e^{-\theta t} = \lim_{t \to \infty} k_t u'(c_t) e^{-\theta t} = 0.$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \mu_t, & (1.13) \\ \dot{\mu}_t &= \mu_t (\theta + n - f'(k_t)), & (1.14) \\ \lim_{t \to \infty} k_t u'(c_t) e^{-\theta t} &= 0. & (1.15) \end{aligned}$$

Sostituendo ora la (1.13) nella (1.14) possiamo eliminare la variabile di costato μ:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = \frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t) \tag{1.16}$$

o, equivalentemente:

$$\left[\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \left(\frac{\dot{c}_t}{c_t} \right) = \theta + n - f'(k_t).$$

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della variabile x, si definisce *elasticità* di $y = f(x)$ rispetto ad x la quantità:

$$\eta = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

quantità che riflette in un certo qual senso il 'grado di curvatura' della funzione f. L'elasticità dell'utilità marginale rispetto al consumo è allora data da:

$$\frac{c_t}{u'(c_t)} \cdot \frac{du'(c_t)}{dc_t} = \frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t). \tag{1.17}$$

L'elasticità di sostituzione fra il consumo in due diversi istanti di tempo t ed s è invece definita da:

$$\sigma(c_t, c_s) = -\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \cdot \frac{d(c_s/c_t)}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}. \tag{1.18}$$

Supponendo che c_t sia costante, si ricava:

$$\begin{aligned} \sigma(c_t, c_s) &= -\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \cdot \frac{dc_s}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \cdot \frac{d(c_s/c_t)}{dc_s} \\ &= -\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \cdot \frac{u'(c_t)}{u''(c_s)} \cdot \frac{1}{c_t} \\ &= -\frac{u'(c_s)}{c_s u''(c_s)}. \end{aligned}$$

Quindi, se $c_s \to c_t$:

$$\sigma(c_t, c_s) \longrightarrow \sigma(c_t) = -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)},$$

e la (1.17) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)\left(f'(k_t) - \theta - n\right). \tag{1.19}$$

L'equazione (1.14), nota come *regola di Ramsey- Keynes*, ha un'interessante interpretazione economica. Poniamoci nel tempo discreto e consideriamo la scelta di un pianificatore che deve allocare il consumo fra il tempo t ed il tempo $t+1$.

Se egli decide di comprimere il consumo al tempo t di un ammontare pari a dc_t, la corrispondente perdita di utilità (valutata al tempo t) è pari a $du(c_t) = u'(c_t)dc_t$. La riduzione del consumo al tempo t permette tuttavia una maggiore accumulazione e quindi un maggior consumo nel periodo successivo. Il consumo pro capite potrà infatti aumentare di un ammontare pari a:

$$\frac{dc_t\left(1 + f'(k_t)\right)}{1+n}$$

con un incremento di utilità pari a:

$$\frac{dc_t\left(1 + f'(k_t)\right)}{1+n} \cdot u'(c_{t+1}).$$

Lungo il sentiero ottimo, piccole riallocazioni del consumo devono lasciare inalterato il livello di benessere: la perdità di utilità al tempo t deve essere pari al valore attuale dell'incremento di utilità al tempo $t+1$:

$$u'(c_t)dc_t = (1+\theta)^{-1}\frac{dc_t\left(1 + f'(k_t)\right)}{1+n} \cdot u'(c_{t+1}).$$

Questa condizione può essere riscritta come:

$$\frac{(1+\theta)^{-1}u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1+n}{1+f'(k_t)}. \tag{1.20}$$

Essa stabilisce che il tasso marginale di sostituzione TMS fra consumo al tempo t e consumo al tempo $t+1$ (termine di sinistra) deve essere uguale al tasso marginale di trasformazione TMT, dal lato della produzione, tra il consumo nei due periodi (termine di destra).

In termini più rigorosi, consideriamo due istanti di tempo t ed s, con $t > s$. Supponiamo ora di riallocare il consumo da un intervallo di tempo molto piccolo, successivo a t, ad un intervallo di pari lunghezza, successivo ad s. Facciamo cioè diminuire c_t di un ammontare Δc_t per un intervallo di tempo Δ_t, incrementando di conseguenza l'accumulazione di capitale di una quantità pari a $\Delta c_t \Delta t$. Consentiamo ora allo stock di capitale di continuare ad accumularsi nel periodo compreso fra $t + \Delta t$ ed s, in base ad un consumo che in quell'intervallo si mantenga ai propri valori originari. L'incremento nello stock di capitale ottenuto fra t e $t + \Delta t$ viene consumato nel corso di un intervallo di tempo che inizia in s ed è di lunghezza Δt. Trascorso tale intervallo il consumo si riassesta sul sentiero originario.

Per valori sufficientemente piccoli di Δc e Δt, se il sentiero originario è quello ottimo, questa riallocazione non dovrebbe avere alcun effetto in termini di benessere. Pertanto:

$$u'(c_t)\Delta c_t \Delta t + e^{-\theta(s-t)} u'(c_t)\Delta c_s \Delta t = 0,$$

ed inoltre:

$$\Delta c_t \Delta t = \Delta k_t \qquad \Delta c_s \Delta t = \Delta k_s.$$

Combinando queste tre relazioni con la (1.13), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mu_t \Delta k_t &= -e^{-\theta(s-t)} \mu_s \Delta k_s \\ \Delta k_s &= -\Delta k_t \cdot \frac{u'(c_t)}{u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}} = -\Delta k_t \cdot \frac{\lambda_t}{\lambda_s}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Si osservi che (1.14) è una equazione lineare del prim'ordine (cfr. [5] pp. 159-164). Essa si presenta infatti nella forma:

$$\dot{x}_t = a_t x_t + b_t,$$

dove $x_t = \mu_t$, $b_t = 0$ e $a_t = \theta + n - f'(k_t)$. La soluzione di (1.14) è pertanto:

$$x_t = e^{\int_{t_0}^{t} a_\tau d\tau} \left[x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} b_u e^{-\int_{t_0}^{u} a_\tau d\tau} du \right],$$

da cui:

$$\mu_t = \mu_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t} (\theta + n - f'(k_\tau)) d\tau},$$

e quindi:

$$\lambda_t = e^{\theta(t_0 - t)} \lambda_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t} (\theta + n - f'(k_\tau)) d\tau} = \lambda_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t} (n - f'(k_\tau)) d\tau}.$$

La (1.21) diventa:

$$\begin{aligned} \Delta k_s &= -\Delta k_t \cdot \frac{\lambda_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t} (n - f'(k_\tau)) d\tau}}{\lambda_{t_0} e^{\int_{t_0}^{s} (n - f'(k_\tau)) d\tau}} = -\Delta k_t \cdot e^{\int_{t_0}^{t} (f'(k_\tau) - n) d\tau - \int_{t_0}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau} \\ &= -\Delta k_t \cdot e^{\int_{t+\Delta t}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Il capitale accumulato nel primo intervallo Δt cresce, tra $t + \Delta t$ ed s, al tasso:

$$\frac{d\Delta k_s / ds}{\Delta k_s} = \frac{-\Delta k_t \cdot e^{\int_{t+\Delta t}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau} (f'(k_s) - n)}{-\Delta k_t \cdot e^{\int_{t+\Delta t}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau}} = f'(k_s) - n.$$

Sotituendo la (1.22) nella (1.21):

$$\begin{aligned} -\Delta k_t e^{\int_{t+\Delta t}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau} &= -\Delta k_t \cdot \frac{u'(c_t)}{u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}}, \\ TMS(t,s) = \frac{u'(c_t)}{u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}} &= e^{\int_{t+\Delta t}^{s} (f'(k_\tau) - n) d\tau} = TMT(s,t). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Questa equazione ha la stessa interpretazione della (1.20), cioè che il tasso marginale di sostituzione deve essere uguale, per ogni t ed s, al tasso marginale di trasformazione. Ne discende che:

$$\lim_{s\to t}\frac{dTMS(t,s)}{ds}=\lim_{s\to t}\frac{dTMT(t,s)}{ds}.$$

Cioè :

$$-\frac{u'(c_t)}{\left[u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}\right]^2}\left[\frac{du'(c_s)}{dc_s}\dot{c}_s e^{-\theta(s-t)}-\theta u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}\right]=\left(f'(k_s)-n\right)e^{\int_{t+\Delta t}^{s}(f'(k_\tau)-n)d\tau}$$

$$\theta-\frac{u''(c_s)\dot{c}_s}{u'(c_s)e^{-\theta(s-t)}}=\left(f'(k_s)-n\right)e^{\int_{t+\Delta t}^{s}(f'(k_\tau)-n)d\tau}$$

e per $s\to t$:

$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)}=\theta+n-f'(k_t).$$

Abbiamo così riottenuto la (1.16).

La regola di Keynes-Ramsey, in tempo continuo (vedi 1.19)o in tempo discreto, stabilisce che il consumo aumenti, rimanga costante o diminuisca, in relazione al fatto che il prodotto marginale del capitale (al netto del tasso di crescita della popolazione) sia maggiore, uguale o minore del tasso di preferenza temporale ($f'(k_t)-n >=< \theta$). È una regola decisamente intuitiva: tanto maggiore è il prodotto marginale del capitale in rapporto al tasso di preferenza temporale, tanto più risulta conveniente comprimere il consumo corrente per poter fruire di un consumo futuro. Pertanto, se inizialmente il prodotto marginale del capitale risulta elevato, lungo il sentiero ottimo il consumo segue un andamento crescente. L'equazione (1.19) mostra inoltre lo specifico ruolo svolto dall'elasticità di sostituzione: tanto maggiore è tale elasticità, tanto più è facile, in termini di utilità rinunciare al consumo corrente a favore di un maggior consumo futuro, e quindi tanto maggiore è il tasso di variazione del consumo per un dato eccesso del prodotto marginale del capitale rispetto al tasso di sconto soggettivo.

Per quanto concerne l'equazione (1.15), essa esprime la cosiddetta condizione di trasversalità. Per meglio comprendere il suo significato è conveniente considerare il problema (1.3) su di un orizzonte finito T. La condizione diventa allora: $k_T u'(c_T)e^{-\theta T}=0$. Se $u'(c_T)e^{-\theta T}=0$ fosse positivo (cioè se il valore attuale dell'utilità marginale del consumo nell'ultimo periodo fosse positivo), non sarebbe ottimale concludere al tempo T con uno stock di capitale positivo, esso potrebbe infatti essere vantaggiosamente consumato.

Nei modelli di ottimizzazione intertemporale vengono frequentemente impiegati due tipi di funzione di utilità istantanea.

1. Il primo tipo prevede elasticità di sostituzione costante, si tratta cioè di funzioni isoelastiche (CRRA, *costant relative risk aversion*):

$$u(c)=\begin{cases}\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{per } \gamma>0,\gamma\neq 1\\ \\ \ln c & \text{per } \gamma=1\end{cases}. \tag{1.24}$$

Utilizzando la (1.18), calcoliamo l'elasticità di sostituzione tra il consumo in due diversi istanti di tempo t ed s:

$$\sigma(c_t, c_s) = -\frac{c_s^{-\gamma}/c_t^{-\gamma}}{c_s/c_t} \cdot \frac{d(c_s/c_t)}{d(c_s^{-\gamma}/c_t^{-\gamma})} = -(c_s/c_t)^{-\gamma-1} \cdot \frac{1}{-\gamma(c_s/c_t)^{-\gamma-1}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Perciò è anche:

$$-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} = -\gamma.$$

La quantità $-c_t u''(c_t)/u'(c_t)$, usualmente chiamata *coefficiente di avversione relativa al rischio*, è quindi costante e pari a $-\gamma$. Per tale ragione le funzioni del tipo (1.24) sono anche chiamate funzioni di utilità con avversione relativa al rischio costante.

2. La seconda classe di funzioni di utilità spesso impiegate in questi modelli è quella delle funzioni esponenziali, o funzioni con avversione assoluta al rischio costante (CARA *constant absolute risk aversion*):

$$u(c) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha c} \qquad \alpha > 0. \tag{1.25}$$

Risulta:

$$-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} = -\frac{c_t \alpha e^{-\alpha c_t}}{e^{-\alpha c_t}} = -\alpha c_t \qquad \text{e} \qquad \sigma(c_t, c_s) = \frac{1}{\alpha c_t}.$$

L'elasticità di sostituzione tra il consumo in diversi istanti del tempo è quindi decrescente all'aumentare del livello del consumo. Il coefficente di avversione assoluta al rischio è invece costante e pari ad α:

$$-\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} = \alpha.$$

Generalmente si ritiene che un'avversione assoluta al rischio costante sia una descrizione dell'atteggiamento verso il rischio meno plausibile di un'avversione relativa costante. Specificazioni della funzione di utilità del tipo CARA sono però talora analiticamente più convenienti rispetto al tipo CRRA, e pertanto appartengono alla strumentazione standard dell'economista.

Data una funzione di utilità CARA, l'equazione (1.19) diventa:

$$\frac{dc_t}{dt} = -\frac{1}{\alpha}[f'(k_t) - n - \theta].$$

In questo caso la variazione nel consumo è proporzionale all'eccesso del prodotto marginale del capitale (al netto della crescita della popolazione) rispetto al tasso di sconto.

Le equazioni che caratterizzano il comportamento dinamico del modello sono la (1.19), la (1.15) e l'equazione di transizione (1.4). Analizziamo prima di tutto lo stato stazionario (*steady state*) del sistema, caratterizzato da un livello di capitale pro capite k^* e da un livello del consumo pro capite c^* costanti, cioè :

$$\left.\frac{dk}{dt}\right|_{(k,c)=(k^*,c^*)} = 0 \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{dc}{dt}\right|_{(k,c)=(k^*,c^*)} = 0.$$

Ponendo $dc/dt = 0$ nella (1.19) otteniamo la cosiddetta *golden rule modificata*:

$$f'(k^*) = \theta + n. \tag{1.26}$$

Essa stabilisce che nello stato stazionario il prodotto marginale del capitale è uguale alla somma del tasso di preferenza temporale e del tasso di crescita della popolazione. Ponendo invece $\dot{k} = 0$ nella (1.4):

$$c^* = f(k^*) - nk^*. \tag{1.27}$$

Se massimizziamo c^* rispetto a k^*, otteniamo invece la vera e propria *golden rule*:

$$f'(k_g) = n. \tag{1.28}$$

La golden rule rappresenta quindi la condizione sullo stock di capitale che massimizza il consumo pro capite nello steady state. La modificazione presentata nella (1.26) comporta una riduzione dello stock di capitale rispetto al livello previsto dalla (1.28), riduzione il cui ammontare dipende dal tasso di preferenza temporale[(2)]. Seguendo la golden rule, la nostra ipotetica famiglia potrebbe consumare di più in corrispondenza dello stato stazionario, ma l'impazienza (che si riflette nel tasso di preferenza temporale θ) implica che non sia ottimale ridurre il consumo corrente per raggiungere in futuro, nello steady state, il più alto livello di consumo assicurato appunto dalla golden rule.

La golden rule modificata è una condizione molto importante. In ultima analisi essa implica che la produttività del capitale, e quindi il tasso di interesse reale, sono determinati dal tasso di preferenza temporale e da n. Sono quindi le preferenze e la crescita della popolazione a stabilire il tasso di interesse reale, mentre la tecnologia determina lo stock di capitale ed il livello di consumo coerenti con quel tasso di interesse.

Per studiare il comportamento dinamico del nostro modello, andiamo a costruire il relativo diagramma di fase sul piano cartesiano k–c. Per prima cosa osserviamo che, per il vincolo (1.6), esso è collocato entro il primo quadrante del piano cartesiano (ortante positivo), con esclusione dell'asse verticale ($k = 0$). Infatti, quando la produzione è nulla, c non può assumere valori positivi e quindi il sistema cade inevitabilmente sul punto $(0, 0)$.

Come già detto le equazioni che caratterizzano le dinamiche del modello sono la (1.4) e la (1.19):

$$\begin{aligned} \dot{k}_t = F_1(k_t, c_t) &= f(k_t) - nk_t - c_t \\ \dot{c}_t = F_2(k_t, c_t) &= c_t \sigma(c_t)(f'(k_t) - \theta - n) \end{aligned}$$

unitamente alla condizione di trasversalità (1.12). Complessivamente i punti fissi (o stati stazionari) del sistema, cioè i punti caratterizzati contemporaneamente da $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$, sono tre:

1. il punto $P_0 = (0, 0)$;
2. lo steady state relativo alla golden rule modificata $P^* = (k^*, c^*)$, dove k^* è lo stock di capitale che soddisfa $f'(k^*) = \theta + n$;

[2] Le condizioni (1.8) e (1.9) implicano che $f'(k)$ è una funzione decrescente dello stock di capitale k. Quindi se $f'(k_1) = \theta + n$ e $f'(k_2) = n$, è $k_1 < k_2$ ed il divario fra k_1 e k_2 dipende da θ.

3. il punto $P_1 = (k_1, 0)$, dove k_1 è soluzione della $f(k_1) = nk_1$.

Essi sono soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} f(k_t) - nk_t - c_t &= 0 \\ c_t\sigma(c_t)(f'(k_t) - \theta - n) &= 0. \end{aligned}$$

Il luogo geometrico dei punti in cui $\dot{k} = 0$ è una curva che parte dall'origine P_0, cresce fino a raggiungere il suo massimo in k_g, che è lo stock di capitale individuato dalla golden rule, e poi decresce fino ad incontrare P_1. Il luogo geometrico dei punti in cui $\dot{c} = 0$ è invece la retta verticale di equazione $k_t = k^*$. Naturalmente, in ogni punto posto sulla curva $\dot{k} = 0$ abbiamo $c = \hat{c} = f(k) - nk$, e quindi tutti i punti al di sopra di essa hanno $c > \hat{c}$, cioè $\dot{k} = \hat{c} - c < 0$. Viceversa, i punti al di sotto di $\dot{k} = 0$ hanno $\dot{k} > 0$. Per quanto concerne invece il luogo $\dot{c} = 0$, tutti i punti collocati alla sua destra ($k > k^*$) hanno $f'(k) < \theta + n$ e quindi $\dot{c} < 0$.

Facendo ricorso alla tecnica di linearizzazione (cfr. [5], pp. 208-211), cioè calcolando gli autovalori della matrice Jacobiana, analizziamo ora la stabilità dei tre punti fissi.

$$J(k,c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial k} & \frac{\partial F_1}{\partial c} \\ \frac{\partial F_2}{\partial k} & \frac{\partial F_2}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(k) - n & -1 \\ c\sigma(c)f''(k) & (\sigma(c) + c\sigma'(c)) \cdot (f'(k) - n - \theta) \end{bmatrix}.$$

Nel punto P_0 gli autovalori di J valgono:

$$\lambda_1 = \sigma(0)(f'(0) - \theta - n) \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = f'(0) - n.$$

Essendo $f'(0) = +\infty$ per l'ipotesi (1.8), segue che $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, cioè P_0 è un repulsore (*repellor*).

Nel punto P_1 gli autovalori di J sono:

$$\lambda_1 = \sigma(0)(f'(k_1) - \theta - n) \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = f'(k_1) - n.$$

Poichè P_1 si trova alla destra della $\dot{c} = 0$, ed inoltre $k_1 > k_g$, abbiamo che $f'(k) < n < \theta + n$, quindi $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. P_1 è, a prima vista, globalmente stabile. Non dobbiamo però dimenticare la condizione di trasversalità $\lim_{t\to\infty} k_t u'(c_t)e^{-\theta t} = 0$. Infatti se prendiamo una traiettoria che converge asintoticamente a P_1 (vedi ad es. Fig.1.1), osserviamo che in prossimità di esso k è approssimativamente costante e maggiore di k_g, quindi $f'(k) < n$. Allora:

$$\frac{d[u'(c)e^{-\theta t}]/dt}{u'(c)e^{-\theta t}} = \frac{du'(c)/dt}{u'(c)} - \theta = n - f'(k) > 0.$$

In altri termini, la quantità $u'(c_t)e^{-\theta t}$ cresce ad un tasso positivo man mano che la traiettoria si avvicina a P_1. La condizione di trasversalità chiede invece che, se k_t è quasi costante, $u'(c_t)e^{-\theta t}$ scenda a zero. Il punto P_1 e le traiettorie che ad essa conducono non possono quindi essere di ottimo per il nostro problema.

Per quanto concerne P^*, gli autovalori valgono:

$$\lambda_1 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - 4c^*\sigma(c^*)f''(k^*)}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - 4c^*\sigma(c^*)f''(k^*)}}{2}.$$

Tenendo conto che la quantità $-4c^*\sigma(c^*)f''(k^*)$ è sempre, per l'ipotesi (1.9), negativa, risulta chiaramente $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. P^* è un punto di sella ed esiste quindi un'unica traiettoria (detta *varietà stabile*, la curva D-D di Fig. 1.1.) che conduce ad esso.

Fig. 1.1. La dinamica del capitale e del consumo.

Fig. 1.1 mostra che, ogni traiettoria che abbia origine in un punto posto al di sotto di D, converge asintoticamente a P_1 e quindi non è, per quanto prima detto, un sentiero ottimo. Se invece prendiamo una traiettoria che parte da una posizione al di sopra di D-D, ci rendiamo prima di tutto conto che questa va sempre ad intersecare la curva $\dot{k} = 0$, entrando nel settore caratterizzato da $\dot{k} < 0$ e $\dot{c} > 0$. Derivando la (1.4), si ricava che:

$$\ddot{k} = \frac{d^2k}{dt^2} = (f'(k) - n)\dot{k} - \dot{c} < 0,$$

cioè in questa regione la curva di k in funzione del tempo è decrescente ed ha concavità rivolta verso il basso. Ciò significa che in un tempo finito k raggiunge lo zero, e quindi il sistema collassa con un balzo a P_0. In altri termini, il consumo varia con discontinuità da un valore positivo ad uno nullo. Questa salto viola la condizione necessaria (1.16) e la traiettoria non può essere ottimale. Argomentazioni analoghe si applicano al caso in cui lo stock di capitale iniziale è maggiore di k^*.

In conclusione, l'unico sentiero che soddisfa le condizioni necessarie della proposizione 1.1 è la varietà stabile D-D.

La linearizzazione del sistema dinamico permette anche di ricavare interessanti informazioni circa il comportamento del sistema in un intorno dello steady state. L'idea è quella di sostituire allo studio del sistema dinamico non lineare $\dot{y} = F(y)$, nell'intorno del punto stazionario y^*, l'analisi del sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti $\dot{y} = F(y^*) + J(y - y^*)$, che nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_1(k^*, c^*) \\ F_2(k^*, c^*) \end{pmatrix} + J(k^*, c^*) \cdot \begin{pmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \theta & -1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta(k - k^*) - (c - c^*) \\ -\beta(k - k^*) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

dove $\beta = c\sigma(c)f''(k) > 0$. Derivando la prima componente rispetto al tempo e sostituendo $\dot{c}$ con la seconda, si ha:

$$\ddot{k} - \theta\dot{k} - \dot{c} = \ddot{k} - \theta\dot{k} - \beta(k - k^*) = 0,$$

cioè:

$$\ddot{k} - \theta\dot{k} - \beta k = -\beta k^*,$$

che è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è:

$$x^2 - \theta x - \beta = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\beta}}{2} < 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\beta}}{2} > 0.$$

Soluzione dell'equazione completa è :

$$k_t = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + K,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie e K è la soluzione 'candidata' (costante) per la completa. Si ricava agevolmente che $K = k^*$. Poiché k_0 è ereditato dalla storia, c_0 e c_1 devono soddisfare:

$$k_0 - k^* = c_0 e^0 + c_1 e^0 = c_0 + c_1,$$

inoltre dato che λ_2 è positivo e tenderebbe a produrre dinamiche esplosive, c_1 deve essere pari a zero per consentire a k di convergere a k^*, e $c_0 = k_0 - k^*$. In ultima analisi, l'andamento di k_t in un intorno sufficientemente piccolo di k^* è governato dalla legge:

$$k_t = k^* + (k_0 - k^*)e^{\lambda_1 t}.$$

La velocità di convergenza di k su k^* è data da:

$$\left| \frac{d(k_t - k^*)/dt}{k_t - k^*} \right| = \left| \frac{\lambda_1 (k_0 - k^*) e^{\lambda_1 t}}{(k_0 - k^*) e^{\lambda_1 t}} \right| = |\lambda_1|.$$

A sua volta $|\lambda_1|$ è una funzione crescente di f'' e di σ, e una funzione decrescente di θ. Tanto maggiore è l'elasticità di sostituzione, tanto più gli agenti sono disposti a posporre il consumo attuale a favore del consumo futuro, tanto più sostenuta è l'accumulazion di capitale etanto più rapidamente l'economia converge allo steady state.

1.2 L'economia decentralizzata

Per una dettagliata esposizione di tutte le ipotesi di questo nuovo modello si veda [4], pp. 60-61.

Data la sequenza $\{w_t, r_t\}$, con $t \in [0, \infty]$, ad ogni istante ogni famiglia deve risolvere il problema:

$$\max U_0 = \int_0^{\infty} u(c_t) e^{-\theta t} dt \tag{1.29}$$

sotto il vincolo di bilancio:

$$c_t + \dot{a}_t + n a_t = w_t + r_t a_t \tag{1.30}$$
$$k_0 > 0 \quad \text{dato},$$

dove $a_t = k_t - b_{pt}$ è la ricchezza della famiglia al netto del capitale umano, pari alla differenza fra la sua disponibilità di capitale k_t ed i suoi debiti b_{pt}. Assumendo per ipotesi l'inelasticità dell'offerta di capitale e di lavoro, la sola decisione che la famiglia in ciascun istante deve assumere è quindi l'alternativa fra consumo e risparmio.

Le imprese dal canto loro massimizzano in ciascun istante il profitto che è dato da:

$$\Pi(K_t, N_t) = F(K_t, N_t) - K_t r_t - N_t w_t.$$

Le condizioni di primo ordine del problema di massimo sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial K_t} &= \frac{\partial F}{\partial K_t} - r_t = \frac{\partial [N_t f(k_t)]}{\partial K_t} - r_t \\
&= N_t f'(k_t) \cdot \frac{\partial k_t}{\partial K_t} - r_t = N_t f'(k_t) \frac{1}{N_t} - r_t \\
&= f'(k_t) - r_t = 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial N_t} &= \frac{\partial F}{\partial N_t} - w_t = \frac{\partial [N_t f(k_t)]}{\partial N_t} - w_t \\
&= f(k_t) + N_t f'(k_t) \cdot \frac{\partial k_t}{\partial N_t} - w_t = f(k_t) + N_t f'(k_t) \left(-\frac{K_t}{N_t^2} \right) - w_t \\
&= f(k_t) - k_t f'(k_t) - w_t = 0.
\end{aligned}$$

Cioè:

$$f'(k_t) = r_t \tag{1.31}$$

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t. \tag{1.32}$$

Nel problema di massimizzazione della famiglia (1.29) non abbiamo specificato alcun vincolo che imponga alla ricchezza a_t della famiglia di essere non negativa. Se non imponiamo restrizioni all'entità dell'indebitamento, la soluzione del problema diventa chiaramente triviale: la famiglia si indebita in misura tale da poter mantenere un livello di consumo in corrispondenza del quale una unità addizionale di consumo non determina alcun incremento dell'utilità, cioè tale per cui l'utilità marginale del consumo è pari a zero. La famiglia deve poi indebitarsi ulteriormente per pagare gli interessi maturati sul proprio debito. Il sentiero temporale di c_t si accompagna quindi a livelli di indebitamento progressivamente crescenti: l'indebitamento netto pro capite cresce al tasso $r_t - n$. Difatti, tenendo conto delle (1.4), (1.31) e (1.32) si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_t &= (r_t - n) a_t + w_t - c_t \\
\dot{a}_t &= (f'(k_t) - n) a_t + f(k_t) - k_t f'(k_t) - c_t \\
\dot{k}_t - \dot{b}_{pt} &= f'(k_t) k_t - f'(k_t) b_{pt} - n k_t + n b_{pt} + f(k_t) - k_t f'(k_t) - c_t \\
\dot{k}_t - \dot{b}_{pt} &= \dot{k}_t - b_{pt}(r_t - n),
\end{aligned}$$

da cui:

$$\dot{b}_{pt} = b_{pt}(r_t - n) \qquad \text{e quindi} \qquad b_{pt} = b_{p0} \cdot e^{\int_0^t (r_\nu - n) d\nu}.$$

È perciò necessaria una condizione addizionale che impedisca alle famiglie di scegliere questo sentiero caratterizzato da un andamento esplosivo del debito. Al contempo tuttavia non vogliamo imporre un vincolo che impedisca situazioni di temporaneo indebitamento. Una condizione cui viene naturale pensare è proprio quella di richiedere che il tasso di crescita del debito della famiglia non sia asintoticamente maggiore del tasso $r_t - n$. In simboli[(3)]:

$$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} = 0. \tag{1.33}$$

Infatti, se la quantità $\gamma_t = a_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu}$ deve convergere a 0 per t che tende ad infinito, significa che il suo tasso di variazione $\dot{\gamma}_t/\gamma_t$ è negativo. Quindi:

$$\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = \frac{\dot{a}_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} - a_t(r_t - n)e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu}}{a_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu}} = \frac{\dot{a}_t}{a_t} - (r_t - n) < 0 \qquad \text{per } t \to \infty,$$

cioè:

$$\frac{\dot{a}_t}{a_t} < (r_t - n) \qquad \text{per } t \to \infty.$$

La (1.33) viene talora chiamata *no-Ponzi-game condition (NPG)*, è cioè la condizione che garantisce che non si verifichi una catena di Ponzi.

Per renderci conto delle implicazioni della (1.33), possiamo prima di tutto integrare il vincolo di bilancio (un'equazione differenziale lineare del primo ordine) dal tempo $t_0 = 0$ ad un qualche tempo t. Si ottiene:

$$a_t = e^{\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} \left[a_0 + \int_0^t (w_s - c_s) e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds \right],$$

e quindi:

$$a_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} + \int_0^t c_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds = a_0 + \int_0^t w_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds.$$

Per $t \to \infty$, ed applicando la (1.33):

$$\int_0^\infty c_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds = a_0 + \int_0^\infty w_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds. \tag{1.34}$$

Quest'ultima relazione implica che il valore attuale del consumo è uguale alla ricchezza totale, data dalla somma della ricchezza iniziale a_0 (non comprensiva del capitale umano) e del valore attuale dei redditi da lavoro. La (1.33) ci permette quindi di passare dal vincolo di bilancio dinamico (1.30) ad un vincolo di bilancio intertemporale.

[3] La (1.33) può anche essere formulata in termini di disuguaglianza:

$$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} \geq 0.$$

È però chiaro che, fintanto che l'utilità del consumo è positiva, le famiglie non desiderano detenere ricchezza perennemente crescente al tasso $r_t - n$. Quindi la disuguaglianza è soddifatta come uguaglianza. Nel seguito pertanto la si utilizzerà direttamente in quest'ultima formulazione.

Anche in questo caso la soluzione del problema (1.29), con i vincoli (1.30) e (1.33), può essere ricavata ricorrendo all'Hamiltoniano. Le condizioni necessarie e sufficienti sono ancora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c_t}(a_t, c_t, \lambda_t, t) &= 0\\ -\frac{\partial H}{\partial a_t}(a_t, c_t, \lambda_t, t) &= \dot{\lambda}_t\\ \lim_{t\to\infty} a_t\lambda_t &= 0.\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}u'(c_t)e^{-\theta t} - \lambda_t &= 0\\ -\lambda_t(r_t - n) &= \dot{\lambda}_t\\ \lim_{t\to\infty} a_t u'(c_t)e^{-\theta t} &= 0,\end{aligned}$$

o, in altra forma:

$$\begin{aligned}u'(c_t) &= \mu_t\\ \mu_t(n + \theta - r_t) &= \dot{\mu}_t\\ \lim_{t\to\infty} a_t u'(c_t)e^{-\theta t} &= 0,\end{aligned}$$

dove $\mu_t = \lambda_t e^{\theta t}$. Da esse si ricava agevolmente:

$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - r_t. \tag{1.35}$$

In condizioni di equilibrio il valore aggregato del debito privato b_{pt} deve essere sempre pari a zero, cioè in equilibrio non si ha ne' indebitamento ne' concessione di prestiti da parte delle famiglie. Allora: $k_t = a_t$. Servendosi di questa e delle condizioni (1.31) e (1.32), dalle (1.30) e (1.35) otteniamo:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t \tag{1.36}$$

$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t), \tag{1.37}$$

che sono esattamente identiche alla (1.4) e alla (1.16), le quali sintetizzano il comportamento di un'economia diretta da un pianificatore. L'andamento dinamico di un'economia decentralizzata coincide quindi con quello di un'economia pianificata, e la nostra precedente analisi del comportamento dinamico dell'economia pianificata si può pertanto estendere interamente all'economia decentralizzata.

È importante sottolineare che tutte le considerazioni svolte sin qui poggiano su di una importante ipotesi che non abbiano ancora enuciato: il tasso di interesse deve essere asintoticamente superiore al tasso di crescita della popolazione, cioè:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t (r_\nu - n)d\nu} = 0.$$

Si tratta di una condizione necessaria per l'esistenza dell'equilibrio: i sentieri lungo i quali il tasso di interesse è asintoticamente inferiore ad n non possono essere equilibri. Riscriviamo il vincolo di bilancio della famiglia nel modo seguente:

$$\dot{a}_t = (r_t - n)a_t - (c_t - w_t).$$

Consideriamo ora due sentieri del consumo i quali, da un certo tempo T in poi, prevedano il medesimo livello di c_t, in modo che $c_t - w_t$ sia uguale. Se $r_t - n$ è asintoticamente negativo, i sentieri convergono ad un medesimo valore a. Quindi, se uno dei sentieri soddisfa la condizione NPG, la soddisfa anche l'altro, cioè su entrambi il tasso di crescita del debito della famiglia è asintoticamente minore del tasso $r_t - n < 0$. Questo implica che alla famiglia, al fine di massimizzare l'utilità derivante dal consumo, conviene mantenere un livello estrememente elevato (teoricamente infinito) di consumo fino al tempo T. Questo non può essere un sentiero di equilibrio.

L'equazione di Eulero (1.35) esprime implicitamente il tasso di variazione del consumo in funzione di variabili che sono tutte note nel periodo corrente. Sembrerebbe quindi che le famiglie, nell'assumere le proprie decisioni di consumo e risparmio, non abbiano necessità di formulare aspettative sulle variabili future. L'ipotesi di perfetta prevedibilità sarebbe quindi superflua. Bisogna però ricordare che la (1.35) determina il tasso di variazione, e non il livello, del consumo. È il vincolo di bilancio intertemporale che mette in evidenza come gli agenti non siano in grado precisare i propri piani d'azione senza conoscere l'intero sentiero temporale dei salari e del tasso di interesse. Le aspettative svolgono perciò un ruolo cruciale nell'allocazione delle risorse di un'economia decentralizzata.

In generale non è facile calcolare una soluzione esplicita per il livello del consumo. Nel caso però in cui la funzione di utilità sia del tipo CRRA, ciò risulta assai agevole. Dalla (1.35) si ricava immediatamente:

$$\dot{c}_t = c_t \frac{1}{\gamma}(r_t - n - \theta),$$

che, integrata:

$$c_t = c_0 e^{\int_0^t 1/\gamma(r_\nu - n - \theta)d\nu}.$$

Sostituendo questa espressione nella (1.34) si può ricavare il valore di c_0 coerente con l'equazione di Eulero ed il vincolo di bilancio:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty c_0 e^{\int_0^s 1/\gamma(r_\nu - n - \theta)d\nu} e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds &= a_0 + \int_0^\infty w_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds \\
c_0 \cdot \int_0^\infty e^{\int_0^s [(1/\gamma - 1)(r_\nu - n) - \theta/\gamma]d\nu} ds &= a_0 + \int_0^\infty w_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds \\
c_0 &= \beta_0(a_0 + h_0),
\end{aligned}$$

dove $\beta_0^{-1} = \int_0^\infty e^{\int_0^s [(1/\gamma - 1)(r_\nu - n) - \theta/\gamma]d\nu} ds$ e $h_0 = \int_0^\infty w_s e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds$.

Il consumo risulta quindi essere una funzione lineare della ricchezza, comprensiva del capitale umano. Il parametro β_0 esprime la propensione al consumo rispetto alla ricchezza e in generale è una funzione del sentiero <u>atteso</u> del tasso di interesse. Data la ricchezza, un aumento dei tassi di interesse ha due effetti:

1. rende più attraente posticipare il consumo (*effetto di sostituzione*);
2. consente un maggiore consumo sia nel presente che nel futuro (*effetto reddito*).

In generale l'effetto complessivo sulla propensione marginale al consumo è ambiguo. Nel caso particolare in cui $\gamma = 1$ si ha:

$$\begin{aligned}\beta_0^{-1} &= \int_0^{\infty} e^{-\int_0^s \theta d\nu} ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\theta t} ds = \frac{1}{\theta},\end{aligned}$$

cioè $\beta_0 = \theta$, che è così indipendente dal sentiero del tasso di interesse.

In generale le aspettative sui tassi di interesse influenzano sia la propensione marginale al consumo rispetto alla ricchezza β_0, sia il valore della ricchezza medesima, attraverso h_0. Anche le aspettative sui salari influenzano c_0, attraverso h_0.

Date queste aspettative, la famiglie decidono quanto consumare e quanto risparmiare e tali decisioni, a loro volta, determinano il sentiero di accumulazione del capitale e la sequenza dei prezzi dei fattori. Se le aspettative non si rivelano corrette, gli agenti sceglieranno un sentiero diverso da quello del nostro ipotetico pianificatore. Quando la divergenza tra gli eventi previsti e quelli realizzati li costringe a rivedere le proprie aspettative, essi scelgono un nuovo sentiero ottimo, date le aspettative. Per seguire questa linea di ragionamento è però necessario un criterio di formazione e di revisione delle aspettative. L'argomento esula dalla presente trattazione.

1.3 Il ruolo del governo in una economia decentralizzata

Supponiamo che il governo consumi un certo ammontare di risorse e che finanzi tale consumo con imposte. La domanda pro capite g espressa dal governo è esogena e non influenza direttamente l'utilità marginale del consumo della famiglia. Supponiamo inizialmente che il governo esiga imposte *lump-sum* per un ammontare pro capite pari a $\tau_t = g_t$, in modo tale che il bilancio sia in costante pareggio. Il vincolo di bilancio delle famiglie diviene:

$$c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + r_t a_t - \tau_t.$$

Integrando questa equazione differenziale, applicando la condizione NPG (vedi quanto fatto nel caso della (1.34)) e ponendo $R_t = e^{-\int_0^t (r_\nu - n) d\nu}$ (fattore di sconto della spesa futura), possiamo scrivere:

$$\int_0^{\infty} c_s R_s ds = k_0 - b_{p0} + \int_0^{\infty} w_s R_s ds - \int_0^{\infty} \tau_s R_s ds,$$

o equivalentemente:

$$\int_0^{\infty} c_s R_s ds = k_0 - b_{p0} + h_0 - G_0. \tag{1.38}$$

G_0 è il valore attuale della spesa pubblica pari, per l'ipotesi $\tau_t = g_t$, al valore attuale delle imposte *lump- sum*.

La spesa pubblica entra nel vincolo di bilancio intertemporale (1.38), influenzando così le decisioni delle famiglie, l'equilibrio reale dell'economia ed il sentiero temporale di w_t ed r_t (quindi di R_t). Supponiamo per semplicità che il governo chieda un ammontare di risorse pro capite costante (e adeguatamente piccolo) g. Per quanto concerne il comportamento dinamico del modello, osserviamo che la (1.4), in conseguenza dell'introduzione dell'imposta, si modifica nel seguente modo:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - g_t - c_t - nk_t,$$

dato che la produzione disponibile per il settore privato è stata uniformemente ridotta di un ammontare g. La curva $\dot{k}_t = 0$ subisce allora una semplice traslazione verso il basso (vedi Fig. 2.3, p. 67, in [4]).

Complessivamente l'effetto prodotto dall'introduzione dell'imposta *lump-sum* è quello di spostare l'equilibrio verso il basso di un ammontare pari proprio a g. In altri termini, il nuovo *steady state* è caratterizzato da un uguale stock di capitale k^* e da un nuovo livello di consumo $\tilde{c} = c^* - g$. Nello stato stazionario la spesa pubblica spiazza completamente il consumo privato, ma non influenza in alcun modo lo stock di capitale.

Invece di finanziare la propria spesa con imposte *lump-sum*, il governo può indebitarsi presso il settore privato. Affinché gli agenti siano disposti a detenere titoli pubblici nel proprio portafoglio, il governo deve pagare un tasso di interesse pari a quello che si percepisce sul capitale. Indichiamo con b_t l'ammontare di debito pro capite. Il governo è soggetto al seguente vincolo di bilancio dinamico:

$$\dot{b}_t + nb_t = g_t - \tau_t + r_t b_t.$$

Il lato sinistro dell'eguaglianza è l'indebitamento pro capite del governo, pari all'aumento del debito pro capite $\dot{b}_t$ più l'ammontare di debito che può essere emesso senza incrementare il debito pro capite, grazie all'aumento della popolazione. Il lato destro è la differenza fra le uscite del governo, gli acquisti di beni e servizi più il pagamento di interessi, e le entrate garantite dalle imposte. Questo vincolo in termini di flussi si limita a specificare che il governo deve indebitarsi quando le sue uscite superano le entrate o, viceversa, che esso ripaga dei debiti o presta al settore privato quando le imposte eccedono le uscite.

Integrando questo vincolo ed imponendo, questa volta al governo, la condizione NPG (il debito non deve crescere più rapidamente del tasso di interesse), possiamo ricavare il vincolo di bilancio intertemporale del governo:

$$\begin{aligned} b_t &= e^{\int_0^t (r_\nu - n)d\nu}\left[b_0 + \int_0^t (g_s - \tau_s)e^{-\int_0^s (r_\nu - n)d\nu} ds\right] \\ b_t R_t + \int_0^t \tau_s R_s ds &= b_0 + \int_0^t g_s R_s ds. \end{aligned}$$

Per $t \to \infty$, ricordando che $b_t R_t \to 0$, si ottiene infine:

$$\int_0^\infty \tau_s R_s ds = b_0 + \int_0^\infty g_s R_s ds. \tag{1.39}$$

Data la condizione NPG, il valore attuale delle imposte deve essere uguale al valore attuale della spesa del governo più il valore iniziale del debito b_0. In altre parole, il governo deve scegliere un sentiero temporale della spesa e delle imposte tale che il valore attuale di $g_t - \tau_t$ (grandezza che viene talora definita disavanzo primario) sia uguale al valore iniziale del debito b_0, con segno negativo. Ciò significa che se nel periodo iniziale il governo ha un debito positivo, deve prevedere di realizzare un avanzo primario in un qualche periodo futuro. Per esempio, è coerente con la (1.39) che il governo mantenga per sempre il debito al valore iniziale pro capite b_0, realizzando un avanzo primario sufficiente a pagare gli interessi al netto dell'ammontare di debito che può essere finanziato vendendo b_0 ad ogni nuovo nato.

La presenza del debito pubblico modifica anche il vincolo di bilancio dinamico della famiglia tipo, che diventa:

$$c_t \dot{a}_t + n a_t = w_t + r_t a_t - \tau_t,$$

in cui a_t è ora uguale a $k_t - b_{pt} + b_t$. È implicita l'ipotesi che la famiglia possa dare e prendere a prestito al medesimo tasso r_t del governo.

Integrando questo vincolo di bilancio ed imponendo la condizione NPG, otteniamo il seguente vincolo di bilancio intertemporale:

$$a_t = e^{\int_0^t (r_\nu - n) d\nu} \left[a_0 + \int_0^t (w_s - \tau_s - c_s) e^{-\int_0^s (r_\nu - n) d\nu} ds \right]$$

da cui:

$$\int_0^\infty c_s R_s ds = k_0 - b_{p0} + b_0 + \int_0^\infty w_s R_s ds - \int_0^\infty \tau_s R_s ds.$$

Il valore attuale del consumo deve essere uguale alla somma della ricchezza al netto del capitale umano (pari a sua volta alla somma di $(k_0 - b_{p0})$ e b_0) e del capitale umano, ossia del valore attuale dei salari al netto delle imposte.

Il vincolo di bilancio del governo mostra come, data la struttura temporale della spesa pubblica (e dato b_0), le autorità devono esigere imposte il cui valore attuale raggiunga una certa entità. In altre parole il bilancio non deve equilibrarsi istante per istante. Per esempio, partendo da una situazione di bilancio in pareggio, il governo può indebitarsi e ridurre le imposte in un dato periodo, per aumentarle successivamente e ripagare il debito e gli interessi.

Questo conduce a chiedersi quale sia l'effetto di una modifica nell'andamento temporale delle imposte riscosse per finanziare una data struttura di spesa. La risposta può essere ottenuta sostituendo nel vincolo di bilancio intertemporale della famiglia il vincolo di bilancio intertemporale del governo:

$$\int_0^\infty c_s R_s ds = k_0 - b_{p0} + \int_0^\infty w_s R_s ds - \int_0^\infty g_s R_s ds.$$

Questa relazione è esattamente uguale alla (1.38). Ne' le imposte, ne' il debito pubblico compaiono nel vincolo di bilancio delle famiglie. Ciò che conta è solo la spesa del governo. Possiamo trarre da questo un'importante implicazione:

dato il sentiero temporale della spesa, il metodo di finanziamento, sia che esso preveda imposte lump-sum, oppure emissione di debito, non esercita alcun effetto sull'allocazione delle risorse.

Si tratta di una conclusione importante; essa infatti fornisce un esempio in cui, sempre che in definitiva il governo rispetti la condizione NPG, la dimensione del debito pubblico è irrilevante e con essa il metodo di finanziamento del disavanzo (neutralità).

Un'imposizione fiscale distorsiva influenza indubbiamente l'allocazione delle risorse. Supponiamo che il governo tassi il rendimento del capitale ad un saggio τ_k, attribuendo il ricavato al settore privato sotto forma di trasferimenti *lump-sum*. Se r_t è il tasso di rendimento del capitale al lordo delle imposte, $(1-\tau_k)r_t$ è il tasso di rendimento netto, il quale a sua volta deve essere uguale al tasso di rendimento del debito emesso dai privati, dato che debito e capitale sono perfetti sostituti nel portafoglio delle famiglie. Il vincolo di bilancio delle famiglie in termini di flusso diviene:

$$c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + (1-\tau_k)r_t a_t + z_t,$$

in cui z_t sono i trasferimenti *lump-sum* pro capite delle famiglie (uguali agli introiti del governo derivanti dalla tassazione sul capitale).

Scrivendo la funzione hamiltoniana anche per la soluzione di questo problema, otteniamo una versione modificata della (1.35):

$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - (1-\tau_k)r_t.$$

L'imposizione sul capitale influenza il livello di steady state dello stock di capitale. Infatti, essendo $r_t = f'(k_t)$ e ponendo $\dot{c} = 0$, esso diventa:

$$\tilde{k}^* = f'^{-1}\left(\frac{\theta+n}{1-\tau_k}\right).$$

che, essendo $(\theta+n)/(1-\tau_k) > (\theta+n)$, è inferiore al precedente valore di equilibrio k^*, cioè $\tilde{k}^* < k^*$. Anche il consumo di steady state è minore a quello che caratterizza l'equilibrio in assenza di tassazione distorsiva.

Ciò equivale a dire che se il governo sussidiasse (esattamente il contrario della tassazione distorsiva sul capitale) il capitale utilizzando imposte *lump-sum*, esso riuscirebbe ad incrementare il livello dello stock di capitale e del consumo di equilibrio (sempre che lo stock di capitale di equilibrio sia al di sotto del livello previsto dalla golden rule).

1.3.1 Investimenti e risparmio in un'economia aperta

Il problema di ottimizzazione si configura nel modo seguente:

$$\max U_0 = \int_0^\infty u(c_t)e^{-\theta t}dt,$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned}
\dot{b}_t &= c_t + i_t\left[1 + T(i_t/k_t)\right] + \theta b_t - f(k_t), && (1.40)\\
\dot{k}_t &= i_t, && (1.41)\\
T(0) &= 0 \qquad T'(\cdot) > 0 \qquad 2T'(\cdot) + \frac{i}{k}T''(\cdot) > 0, && (1.42)
\end{aligned}$$

dove i_t indica il numero di unità di stock di capitale investite al tempo t e b_t il debito pro capite. In questo caso c_t e i_t sono le variabili di stato del modello, mentre b_t e k_t sono quelle di controllo.

La popolazione è qui ipotizzata essere costante. La funzione di utilità istantanea $u(\cdot)$ e $f(\cdot)$ hanno le stesse proprietà attribuitevi nei paragrafi precedenti.

Due sono le modifiche rispetto all'analisi già condotta. Innanzi tutto introduciamo dei costi di installazione per i beni di investimento. In particolare ipotizziamo che siano necessarie $i[1+T(\cdot)]$ unità di prodotto per incrementare lo stock di capitale di i unità. $T(\cdot)$ è l'ammontare di risorse per unità di investimento richiesto per trasformare beni in capitale. Le proprietà di $T(\cdot)$ sono tali da rendere la funzione dei costi di installazione $T(\cdot)i/k$ non negativa e convessa, con un valore minimo di zero in corrispondenza di un valore nullo degli investimenti. Infatti le prime due condizioni in (1.42) impongono che $T(\cdot)$ sia una funzione strettamente crescente passante per l'origine. Quindi se $i_t/k_t < 0$ è $T(i_t/k_t) < 0$, e viceversa se $i_t/k_t \geq 0$ è $T(i_t/k_t) \geq 0$, quindi:

$$\frac{i_t}{k_t}T(\frac{i_t}{k_t}) \geq 0 \qquad \forall\ \frac{i_t}{k_t}.$$

Il punto $(0,0)$ è quindi punto di minimo per la funzione. Le sue derivate prima e seconda sono:

$$\begin{aligned}\frac{d[i_t/k_tT(i_t/k_t)]}{d(i_t/k_t)} &= T(\frac{i_t}{k_t}) + \frac{i_t}{k_t}T'(\frac{i_t}{k_t}) \\ \frac{d^2[i_t/k_tT(i_t/k_t)]}{d(i_t/k_t)^2} &= 2T'(\frac{i_t}{k_t}) + \frac{i_t}{k_t}T''(\frac{i_t}{k_t})\end{aligned}$$

La terza condizione in (1.42) impone pertanto che la derivata seconda sia strettamente positiva, cioè impone che la funzione sia strettamente convessa. Il punto $(0,0)$ è allora l'unico punto di minimo per la funzione. La funzione decresce per valori negativi di i_t/k_t e cresce per valori positivi. Sia investire che disinvestire risulta costoso. Per semplicità assumiamo che non vi sia usura del capitale.

La seconda modifica che apportiamo è che ora l'economia nel suo complesso può liberamente prendere e dare a prestito all'estero, al tasso di interesse mondiale costante θ. Da questa ipotesi deriva il vincolo di bilancio in termini di flussi descritto dalla (1.40): la variazione del debito verso l'estero $\dot{b}_t$ è uguale alla differenza fra la spesa (in beni di consumo, in beni di investimento, per il pagamento di interessi) e la quantità prodotta. La variazione dell'indebitamento verso l'estero è il disavanzo delle partite correnti e la (1.40) può pertanto essere interpretata nel senso che quest'ultimo non è altro che l'eccesso di 'assorbimento' rispetto al livello di produzione.

Per risolvere il nostro problema intertemporale, costruiamo prima di tutto l'Hamiltoniano:

$$H = u(c_t)e^{-\theta t} + \lambda_t\left\{c_t + i_t[1+T(\frac{i_t}{k_t})] + \theta b_t - f(k_t)\right\} + \gamma_t i_t.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per un massimo sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c_t} &= u'(c_t)e^{-\theta t} + \lambda_t = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial i_t} &= \lambda_t\left[1 + T(\frac{i_t}{k_t}) + i_tT'(\frac{i_t}{k_t})\frac{1}{k_t}\right] + \gamma_t = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H}{\partial b_t} &= -\lambda_t \theta \\
\dot{\gamma}_t = -\frac{\partial H}{\partial k_t} &= -\lambda_t \left[-i_t T'(\frac{i_t}{k_t}) \frac{i_t}{k_t^2} - f'(k_t) \right] \\
\lim_{t \to \infty} \lambda_t b_t &= 0 \\
\lim_{t \to \infty} \gamma_t k_t &= 0.
\end{aligned}
$$

Ponendo per comodità $\gamma_t = -\lambda_t q_t$ e $\mu_t = -\lambda_t e^{\theta t}$, le condizioni diventano:

$$
\begin{aligned}
u'(c_t) &= \mu_t && (1.43) \\
q_t &= 1 + T(\frac{i_t}{k_t}) + \frac{i_t}{k_t} T'(\frac{i_t}{k_t}) && (1.44) \\
\frac{d(-\mu_t e^{-\theta t})}{dt} &= \theta \mu_t e^{-\theta t} && (1.45) \\
\frac{d(\mu_t q_t e^{-\theta t})}{dt} &= -\mu_t e^{-\theta t} \left[\left(\frac{i_t}{k_t} \right)^2 T'(\frac{i_t}{k_t}) + f'(k_t) \right] && (1.46) \\
\lim_{t \to \infty} -\mu_t b_t e^{-\theta t} &= 0 && (1.47) \\
\lim_{t \to \infty} -\mu_t q_t k_t e^{-\theta t} &= 0. && (1.48)
\end{aligned}
$$

Va ricordato che anche questo problema di massimizzazione ha una soluzione banale del tipo catena di Ponzi, vista ora nell'ottica del pianificatore nei confronti del resto del mondo. Il paese potrebbe infatti indebitarsi fino al punto in cui l'utilità marginale del consumo è pari a zero, per poi indebitarsi ulteriormente per pagare gli interessi sul proprio debito. D'altra parte, è improbabile che vi sia qualcuno disposto a continuare a concedere prestiti ad un paese il cui unico mezzo per onorare gli obblighi contratti sia quello di indebitarsi ulteriormente. Dobbiamo pertanto imporre la condizione NPG:

$$\lim_{t \to \infty} -b_t e^{-\theta t} = 0. \tag{1.49}$$

Sviluppando ora la (1.45), si ottiene:

$$-\dot{\mu}_t e^{-\theta t} + \theta \mu_t e^{-\theta t} - \theta \mu_t e^{-\theta t} = 0,$$

da cui:

$$\dot{\mu}_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_t = (\text{cost.}).$$

Dato che μ_t è costante, la (1.43) può implicare due diversi fatti:

1. la funzione di utilità è una funzione lineare della variabile c_t: $u(c_t) = \text{cost} \cdot (c_t - c_0) + u(c_0)$;

2. lungo il sentiero ottimo il consumo è costante.

Il primo caso va però escluso in quanto in contraddizione con l'ipotesi (1.7), quindi non può che essere $c_t = \text{(cost)}$.

Per ottenere il livello di consumo integriamo il vincolo di bilancio (1.40):

$$\begin{aligned} b_t &= e^{\int_{t_0}^t \theta d\tau} \left\{ b_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[c_s + i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] - f(k_s) \right] e^{-\int_{t_0}^t \theta d\tau} ds \right\} \\ b_t &= e^{\theta(t-t_0)} \left\{ b_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[c_s + i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] - f(k_s) \right] e^{-\theta(t-t_0)} ds \right\} \\ \lim_{t\to\infty} b_t e^{-\theta t} &= e^{-\theta t_0} \left\{ b_{t_0} + \int_{t_0}^\infty \left[c_s + i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] - f(k_s) \right] e^{-\theta(t-t_0)} ds \right\}. \end{aligned}$$

Ricordando la condizione NPG (o la (1.47)):

$$\int_{t_0}^\infty c_t e^{-\theta(t-t_0)} d_t = \int_{t_0}^\infty \left[f(k_t) - i_t[1 + T(\frac{i_t}{k_t})] \right] e^{-\theta(t-t_0)} dt - b_{t_0}, \tag{1.50}$$

che, per $t_0 = 0$, diventa:

$$\int_0^\infty c_t e^{-\theta t} d_t = \int_0^\infty \left[f(k_t) - i_t[1 + T(\frac{i_t}{k_t})] \right] e^{-\theta t} dt - b_0 \equiv v_0. \tag{1.51}$$

Il valore attuale del consumo è uguale alla ricchezza netta v_0 calcolata al tempo $t_0 = 0$, ossia al valore attuale del prodotto netto $f(k_t) - i_t[1+T(i_t/k_t)]$, meno il livello iniziale del debito. Dato che il consumo è costante la (1.51) implica:

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\infty e^{-\theta t} d_t &= v_0 \\ \frac{c_0}{\theta} &= v_0 \\ c_t = c_0 &= \theta v_0. \end{aligned} \tag{1.52}$$

L'equazione (1.44) contiene un risultato molto forte: il tasso di investimento in rapporto allo stock di capitale, cioè la quantità i_t/k_t, risulta essere funzione esclusivamente di q_t, ossia del prezzo ombra di un'unità di capitale installato espresso in termini di beni di consumo. In altri termini, la (1.44) implica una relazione $q = \psi(i/k)$, con $\psi' > 0$ e $\psi(0) = 1$, dove $\psi(i/k) = 1 + T(i/k) + i/kT'(i/k)$. Essendo ψ monotona, possiamo definire la sua inversa $\varphi(\cdot)$, per la quale è $i/k = \varphi(q)$. Le proprietà di φ implicano che $\varphi' > 0$ e $\varphi(1) = 0$. Sostituendo nella (1.41):

$$\dot{k}_t = i_t = k_t \varphi(q_t), \qquad \varphi(q_t) > 0, \quad \varphi(1) = 0. \tag{1.53}$$

Questa relazione ci dice che il pianificatore eguaglia il valore marginale dello stock di capitale ($k_t\varphi(q_t)$) al suo costo marginale (i_t), dove il costo al margine aumenta al crescere del tasso di investimento. Naturalmente incorrere nel piu' alto costo marginale di un maggior investimento risulta ragionevole solo se anche il valore ombra del capitale è più elevato. Quando $q = 1$, cioè quando il prezzo ombra del capitale è uguale a quello dei beni di consumo, il tasso di investimento è chiaramente nullo. Solo quando $q > 1$, il tasso di investimento è positivo.

Sviluppiamo ora la (1.46) tenendo conto che $\dot{\mu}_t = 0$ e che $i_t/k_t = \varphi(q_t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_t q_t e^{-\theta t} + \mu_t \dot{q}_t e^{-\theta t} - \theta \mu_t q_t e^{-\theta t} &= -\mu_t e^{-\theta t} \left[\left(\frac{i_t}{k_t} \right)^2 T'(\frac{i_t}{k_t}) + f'(k_t) \right] \\ \dot{q}_t &= \theta q_t - f'(k_t) - \varphi^2(q_t) T'(\varphi(q_t)) \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} q_t &= e^{\int_{t_0}^t \theta d\tau} \left\{ q_{t_0} - \int_{t_0}^t \left[f'(k_s) + \varphi^2(q_t) T'(\varphi(q_t)) \right] e^{-\int_{t_0}^t \theta d\tau} ds \right\} \\ \lim_{t \to \infty} q_t e^{-\theta t} &= e^{-\theta t_0} \left\{ q_{t_0} - \int_{t_0}^{\infty} \left[f'(k_s) + \varphi^2(q_t) T'(\varphi(q_t)) \right] e^{-\theta(s-t_0)} ds \right\}. \end{aligned}$$

Occorrerebbe a questo punto caratterizzare il diagramma di fase associato alle equazioni (1.53) e (1.54), e dimostrare che l'unico sentiero che soddisfa tali equazioni unitamente alla condizione di trasversalità (1.48) è un sentiero lungo il quale k e q tendono rispettivamente a k^* e q^*. In tal modo sarebbe dimostrato che $\lim_{t \to \infty} q_t e^{-\theta t} = 0$. L'analisi verrà condotta nelle pagine che seguono. Per ora assumiamo questo fatto come vero.

Eguagliando quindi a zero il termine di sinistra nell'ultima equazione scritta e ponendo $t_0 = t$, segue:

$$q_t = \int_t^{\infty} \left[f'(k_s) + \varphi^2(q_t) T'(\varphi(q_t)) \right] e^{-\theta(s-t)} ds \tag{1.55}$$

Il prezzo ombra del capitale è allora uguale al valore attuale del prodotto marginale nei periodi futuri, il quale a sua volta è dato dalla somma di due termini: il prodotto marginale del capitale impiegato nella produzione e la riduzione del costo marginale di installazione di un dato flusso di investimenti, dovuta all'incremento dello stock di capitale. Tanto maggiore è il prodotto marginale corrente e quelli futuri attesi, o tanto minore è il tasso di sconto, tanto maggiore è q_t, e quindi il tasso di investimento.

La caratteristica più importante della (1.55) è che q_t, e con esso il tasso di investimento, non dipende dalle proprietà della funzione di utilità, ne' dal livello del debito. In questo modello di economia aperta, con un tasso di interesse reale esogeno θ, le decisioni di investimento sono indipendenti da quelle relative al consumo ed al risparmio.

Il risparmio è dato da: $s_t = f(k_t) - c_t - \theta b_t$. Rielaborando la (1.50) e tenendo conto che c_t è costante, abbiamo:

$$\begin{aligned} c_t \int_t^{\infty} e^{-\theta(s-t)} d_s &= \int_t^{\infty} \left[f(k_s) - i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] \right] e^{-\theta(s-t)} ds - b_t, \\ \frac{c_t}{\theta} &= \int_t^{\infty} \left[f(k_s) - i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] \right] e^{-\theta(s-t)} ds - b_t. \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} s_t &= f(k_t) - \theta \int_t^{\infty} \left[f(k_s) - i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] \right] e^{-\theta(s-t)} ds + \theta b_t - \theta b_t \\ s_t &= f(k_t) - \theta \int_t^{\infty} \left[f(k_s) - i_s[1 + T(\frac{i_s}{k_s})] \right] e^{-\theta(s-t)} ds. \end{aligned} \tag{1.56}$$

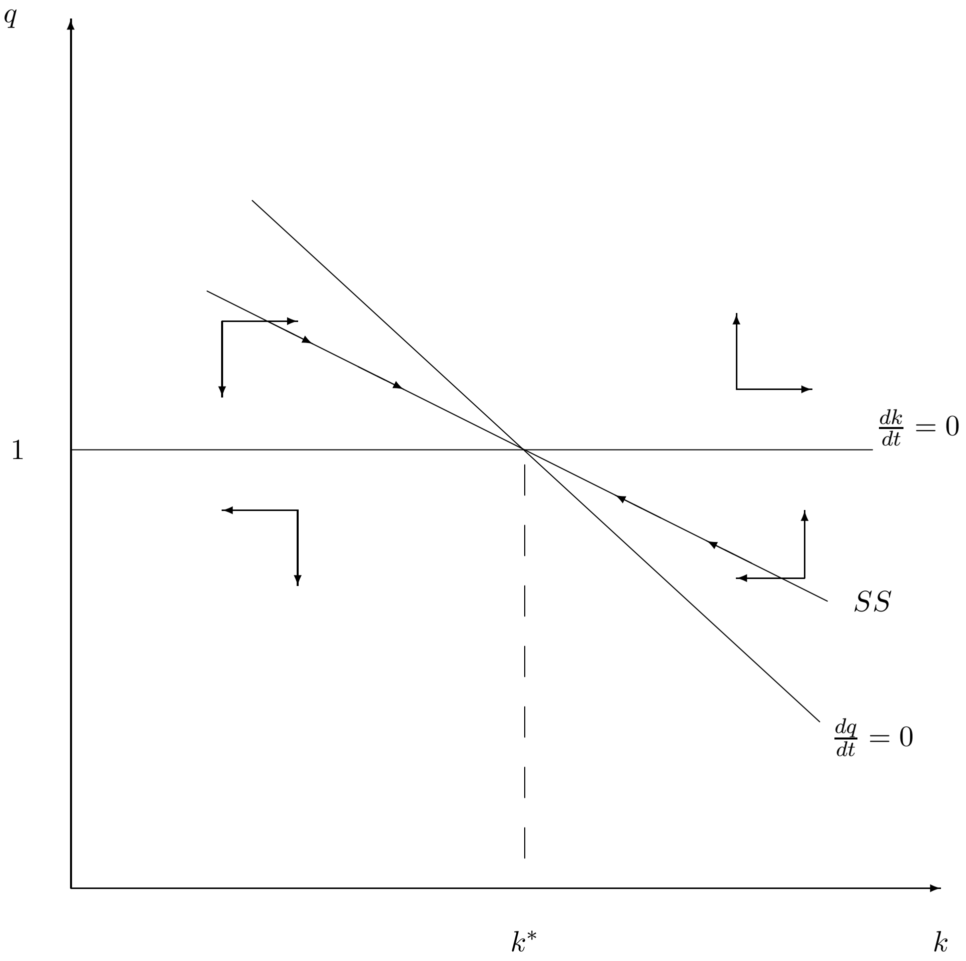

Fig. 1.2. Dinamica degli investimenti e del capitale.

Il risparmio è elevato quando la produzione è elevata in rapporto alla produzione futura attesa. Un secondo importante risultato è l'indipendenza del risparmio dal livello del debito. Infatti, l'eguaglianza tra propensione marginale al consumo e tasso di interesse fa sì che un incremento nel livello del debito comporti un identico decremento nel reddito e nel consumo, e lasci inalterato il risparmio.

Passiamo ora allo studio del comportamento dinamico del modello.

Per ricercare i punti fissi imponiamo la condizione $\dot{k}_t = \dot{q}_t = 0$:

$$\begin{aligned} k_t \varphi(q_t) &= 0 \\ \theta q_t - f'(k_t) - \varphi^2(q_t) T'(\varphi(q_t)) &= 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\varphi(1) = 0$, si vede facilmente che esiste una sola soluzione:

$$q^* = 1, \quad f'(k^*) = \theta. \tag{1.57}$$

In corrispondenza dello steady state il tasso di investimento $\dot{k}_t$ è quindi nullo. Il prezzo ombra del capitale è uguale al costo di rimpiazzo. Il prodotto marginale del capitale $f'(k_t)$ è uguale al tasso di interesse, il quale a sua volta è uguale al tasso di preferenza intertemporale θ.

Procedendo alla linearizzazione, la matrice jacobiana del sistema è:

$$J(k,q) = \begin{bmatrix} \varphi(q) & k\varphi'(q) \\ -f''(k) & \theta - 2\varphi(q)\varphi'(q)T'(\varphi(q)) - \varphi^2(q)\varphi'(q)T''(\varphi(q)) \end{bmatrix}.$$

che nello steady state vale:

$$J(k^*,q^*) = \begin{bmatrix} 0 & k^*\varphi'(1) \\ -f''(k^*) & \theta \end{bmatrix},$$

e i cui autovalori sono:

$$\lambda_1 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - 4k^*\varphi'(1)f''(k^*)}}{2} > \theta \qquad \lambda_2 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - 4k^*\varphi'(1)f''(k^*)}}{2} < 0.$$

Il punto $(k^*, q^*) = (f'^{-1}(\theta), 1)$ è quindi di sella per il sistema ed esiste un unico sentiero convergente allo steady state.

La linearizzazione del sistema in un intorno dello steady state diventa allora:

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{q}_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k^*\varphi'(1) \\ -f''(k^*) & \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ q_t - 1 \end{pmatrix}, \tag{1.58}$$

cioè:

$$\begin{cases} \dot{k}_t = k^*\varphi'(1)(q_t - 1) \\ \dot{q}_t = -f''(k^*)(k_t - k^*) + \theta(q_t - 1). \end{cases}$$

Il luogo geometrico $dk/dt = 0$ è orizzontale, passante per $q = 1$, mentre il luogo geometrico $dq/dt = 0$ è negativamente inclinato, con inclinazione pari a $f''(k^*)/\theta$.

Possiamo quindi tracciare il diagramma di fase per l'analisi della stabilità locale del sistema in un intorno dello stato stazionario (vedi Fig. 1.2). L'unico sentiero convergente all'equilibrio è la curva SS.

La dinamica degli investimenti può essere dedotta dal sentiero di sella SS: dato lo stock di capitale iniziale k_0, lungo SS calcoliamo il valore iniziale q_0. La (1.53) permette a questo punto di determinare il corrispondente livello degli investimenti. Se q_0 è ad esempio superiore a 1, il capitale si accumula nel corso del tempo, il prodotto aumenta e con esso il prodotto netto $f(k) - i[1 + T(i/k)]$. Nel corso del tempo il prodotto aumenta e gli investimenti diminuiscono.

Il consumo ed il debito. Abbiamo visto come il livello del consumo risulti costante, e come sia determinato dal sentiero del prodotto netto (a sua volta determinato da quello degli investimenti) e dallo stock iniziale di debito. La Fig. 1.3 riporta un sentiero temporale del prodotto netto crescente, con il prodotto che aumenta man mano che lo stock di capitale cresce fino al proprio

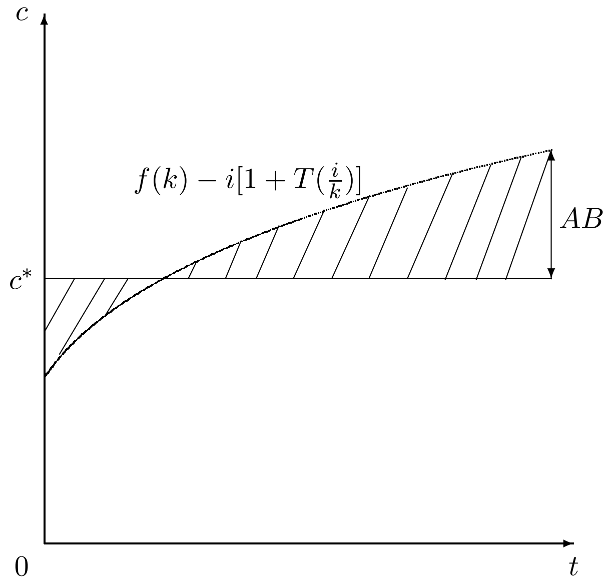

Fig. 1.3. Consumo, produzione netta, commercio internazionale e saldo delle partite correnti.

livello di steady state. Si tratta ora di determinare il sentiero del consumo. Assumiamo che il livello iniziale del debito sia $b_0 = 0$. In base alla (1.51) il livello costante del consumo deve essere tale che il valore attuale del prodotto netto meno il consumo sia nullo. Ciò equivale a dire che il valore attuale dei surplus commerciali correnti e futuri deve essere uguale a zero. Graficamente, i valori attuali delle due aree tratteggiate della Fig. 1.3 devono essere identici e di segno opposto; il livello del consumo può allora essere determinato tracciando una linea retta che renda le due aree uguali in valore attuale.

Nella Fig. 1.3 il prodotto netto aumenta nel corso del tempo: in un primo tratto esso è inferiore al consumo, successivamente diviene superiore. L'eccesso iniziale di consumo rispetto al prodotto netto può essere ottenuto indebitandosi verso l'estero, ossia incorrendo in un disavanzo commerciale. In questa prima fase il debito si accumula, mentre in quella finale il prodotto netto cresce a sufficienza da generare un avanzo della bilancia commerciale. In steady state il saldo delle partite correnti deve essere nullo: il surplus commerciale viene esattamente compensato dal pagamento degli interessi sul debito. Il livello di steady state del debito b^* è positivo e tale che nella Fig. 1.3 θb^* è uguale ad AB, cioè all'avanzo commerciale. La presenza di un debito positivo riflette la decisione di consumare, nei periodi iniziali, in misura maggiore del prodotto netto.

1.3.2 Shock della produttività e partite correnti

I sentieri del consumo e delle partite correnti derivati grazie alla precedente analisi possono servire come punto di partenza nell'analisi degli effetti prodotti da shock della produttività. Supponiamo che il livello della produzione sia dato da:

$$y = (1 - z_0)f(k) - z_1,$$

dove z_0 è uno shock moltiplicativo e z_1 uno shock additivo, con $z_0, z_1 > 0$.

Uno shock additivo di carattere permanente. Assumiamo che l'economia si trovi inizialmente in steady state. Consideriamo un incremento inatteso e permanente di z_1, a partire da un valore iniziale pari a zero; il prodotto netto è quindi pari a: $y = f(k) - z_1$. L'aumento di z_1 non esercita alcun effetto sul prodotto marginale del capitale ($y' = f'(k)$), ne' quindi sugli investimenti e sullo stock di capitale. Dato che si tratta di una perturbazione inattesa e permanente, l'incremento di z_1 comporta una riduzione inattesa e permanente del prodotto netto, per un ammontare esattamente pari a z_1. In base alla (2.52) il consumo diminuisce anch'esso nella medesima misura. Il risparmio pertanto rimane invariato. Essendo rimasti immutati consumi ed investimenti, possiamo concludere che il saldo delle partite correnti non viene modificato da uno shock inatteso sulla produttività. In questo caso di aumento inatteso e permanente di z_1, l'economia subisce immediatamente la relativa perdita, senza alcuna ulteriore conseguenza sull'allocazione delle risorse.

Uno shock additivo di carattere transitorio. Supponiamo ora che z_1 subisca un aumento inatteso, ma di carattere transitorio, per un periodo compreso tra il tempo 0 ed il tempo T. Questa perturbazione, come la precedente, non esercita alcun effetto sugli investimenti, ma, a differenza della precedente, comporta variazioni nel risparmio e nelle partite correnti. La riduzione nel valore attuale del prodotto netto è data da $-z_1 \int_0^T e^{-\theta t} dt$, cioè $-z_1 \theta^{-1}[1 - e^{-\theta T}]$. La diminuzione del consumo è quindi pari a $-z_1[1 - e^{-\theta T}]$. Questa variazione nel consumo è permanente. Se T è piccolo, anche questa variazione è piccola: gli agenti riducono solo in minima parte il proprio consumo e la maggior parte della diminuzione delle quantità prodotte si traduce in una diminuzione del risparmio e in un disavanzo delle partite correnti. Dopo che la produzione è ritornata al proprio livello normale, l'economia deve realizzare un avanzo commerciale permanente per poter affrontare il maggior pagamento per interessi sul debito contratto. Se T è grande, la variazione del consumo è più rilevante e la riduzione del risparmio, e quindi l'incremento del debito, è più contenuta.

Uno shock moltiplicativo di carattere permanente. Consideriamo ora un incremento permanente di z_0 da zero ad un valore positivo, che abbia luogo al tempo $t = 0$. Dato che il prodotto marginale del capitale è $(1 - z_0)f'(k)$, una variazione di z_0 influenza gli investimenti.

La Fig. 1.4 mostra gli effetti prodotti da un incremento di z_0: mentre il luogo geometrico $\dot{k} = 0$ rimane immutato, $\dot{q} = 0$ si sposta verso sinistra. L'equilibrio di steady state dell'economia si muove da E ad E'. In E' lo stock di capitale di steady state k'^* è inferiore al suo valore originario k^*. Il nuovo sentiero di sella è SS'. Poichè lo stock di capitale iniziale è k^*, il sentiero di aggiustamento prevede un salto da E ad A al tempo 0, e un movimento da A ad E' nel corso del tempo. Lungo tale sentiero di aggiustamento il tasso di investimento è negativo, e converge a zero man mano che l'economia si muove verso il nuovo equilibrio di steady state.

Inizialmente il prodotto netto $(1 - z_0)f(k) - i[1 + T(i/k)]$ può sia aumentare che diminuire. Il prevalere dell'una o dell'altra eventualità dipende dal fatto che la diminuzione del prodotto associata all'aumento di z_0 sia maggiore o minore della contrazione degli investimenti. Nel lungo periodo questa ambiguità scompare. Dato che gli investimenti ritornano ad un valore nullo e che lo stock di capitale diminuisce, nel nuovo equilibrio di steady state il prodotto netto deve essere inferiore: all'effetto iniziale dello shock negativo si aggiunge quello di una minore accumulazione di capitale.

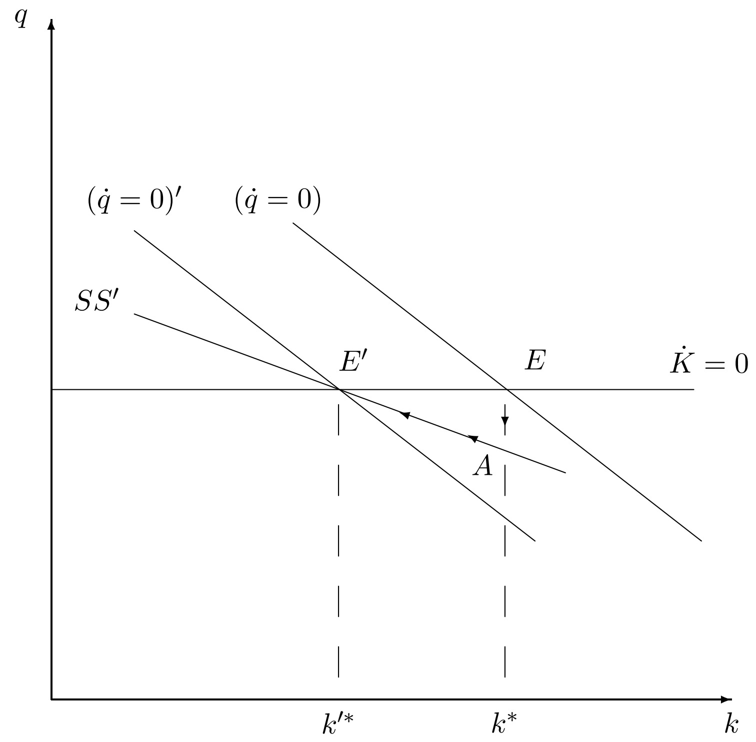

Fig. 1.4. Gli effetti di uno shock negativo dal lato dell'offerta sugli investimenti e sul capitale.

1.4 La funzione di utilità

Sino ad ora abbiamo ipotizzato che la funzione di utilità sia additivamente separabile, cioè che l'utilità totale derivante dal consumo su piu' periodi risulti pari alla somma delle utilità dei consumi nei diversi istanti, e che presenti un fattore di sconto con progressione esponenziale. Queste ipotesi portano, come si è visto, a dei risultati estremamente forti che si possono riassumere nella golden rule modificata (1.26).

Quando si abbandona l'ipotesi di separabilità additiva il modello può esibire una dinamica assai più complessa. Assumendo ad esempio che la funzione di utilità istantanea abbia la forma $u(c_t, z_t)$, dove z_t dipende dai consumi precedenti, si dimostra che i sentieri ottimali possono presentare un *overshooting* intorno allo steady state e il sentiero di aggiustamento verso lo steady state può esibire un andamento di tipo oscillatorio.

Continuando ad assumere che la funzione di felicità sia del tipo $u(c_t)$, ci concentriamo ora sull'ipotesi del tasso di preferenza temporale θ costante. Nelle pagine precedenti abbiamo infatti ipotizzato che tutte le famiglie siano caratterizzate dal medesimo tasso di sconto θ. Ora invece possiamo supporre che vi siano m diversi tipi di famiglia, ordinati per impazienza in senso decrescente, con tassi $\theta_1 > \ldots \theta_m > 0$. Imponiamo inoltre, per semplicità espositiva, che $n = 0$.

Pensiamo inizialmente che $r < \theta_m$, cioè che il tasso di interesse sia inferiore al più piccolo dei tassi di preferenza temporale delle famiglie. In base alla (1.35) ciò significa che le famiglie seguono un profilo dell'utilità marginale crescente, cioè (dato che $u''(c) < 0$) un profilo del consumo decrescente. Ma se tutte le famiglie seguono un sentiero a consumo decrescente e se la crescita della popolazione è nulla, l'economia non può raggiungere uno stato stazionario in cui il consumo aggregato sia costante.

Supponiamo invece che $\theta_m < \ldots < r < \ldots < \theta_1$. Ecco allora che le famiglie il cui tasso di sconto è inferiore ad r mostrano un consumo crescente, le altre decrescente. La frazione del consumo totale che possiamo attribuire alle famiglie con profilo del consumo crescente aumenta ovviamente nel corso del tempo (e tende ad uno). Questo significa che le famiglie con il tasso di sconto più basso andranno via via conquistando una quota sempre più ampia del consumo totale e quindi questo risulta progressivamente crescente. Ciò è nuovamente incompatibile con l'equilibrio di steady state.

Nello stato stazionario il tasso di interesse r deve pertanto essere uguale a θ_m. Il profilo della famiglia più paziente è costante ($\dot{c}_t = 0$) mentre quello di tutte le altre famiglie è decrescente: i 'lenti e costanti' sono destinati a vincere la battaglia e ad accaparrarsi tutta la ricchezza, non solo tutto il capitale fisico ma anche quello umano di tutte le altre famiglie, le quali si trovano costrette a spendere tutto il proprio reddito da lavoro in contropartita dei debiti contratti in passato.

È possibile ottenere un risultato un po' meno estremo impedendo ai consumatori di indebitarsi a fronte del reddito da lavoro e quindi vincolandoli a detenere una ricchezza finanziaria non negativa: in equilibrio sarà ancora $r = \theta_m$, le famiglie più pazienti finiranno con il detenere tutta la ricchezza escluso il capitale umano, mentre le altre manterranno un consumo pari al loro reddito da lavoro.

Togliamo ora l'ipotesi di tasso di preferenza temporale costante ed assumiamo che la funzione integrale di utilità sia:

$$U_s = \int_s^\infty u(c_t)D(t, t-s, x_t)dt, \tag{1.59}$$

dove $D(\cdot)$ è la nostra funzione di sconto la quale dipende dalla data del calendario, dalla distanza temporale $t - s$ e da altre variabili (quali ad esempio lo stesso consumo), che noi abbiamo voluto genericamente indicare con x_t. Nelle pagine precedenti invece abbiamo potizzato che $D(\cdot)$ dipenda solo dalla distanza temporale e che abbia la forma esponenziale $\mathrm{e}^{-\theta(t-s)}$.

Si è già detto che tutti i programmi ottimali devono prevedere che il tasso marginale di sostituzione fra il consumo di due periodi sia uguale al tasso marginale di trasformazione. Prendiamo due date di pianificazione T_1 e T_2 e due istanti di tempo t_1 e t_2, tali che $t_2 > t_1 > T_2 > T_1$. In corrispondenza delle due date di pianificazione T_1 e T_2, il tasso marginale di sostituzione tra il consumo al tempo t_1 e quello al tempo t_2 è dato rispettivamente da:

$$\frac{u'(c_{t_1})D(t_1, t_1 - T_1)}{u'(c_{t_2})D(t_2, t_2 - T_1)} \qquad \text{e} \qquad \frac{u'(c_{t_1})D(t_1, t_1 - T_2)}{u'(c_{t_2})D(t_2, t_2 - T_2)}.$$

Poichè $D(t, t - T_1)$ in generale differisce da $D(t, t - T_2)$, non vi è motivo alcuno per cui le due quantità risultino eguali. Questo significa che il programma ottimale scelto alla data T_1 non è più tale alla data T_2. Il programma ottimale è quindi *dinamicamente incoerente*: esso varia nel corso del tempo nonostante non si rendano disponibili nuove informazioni.

Affinché il programma ottimale sia dinamicamente coerente si dimostra che $D(\cdot)$ deve essere o una funzione esponenziale della distanza temporale $\mathrm{e}^{-\theta(t-s)}$, oppure una funzione i cui argomenti sono esclusivamente la data del calendario o il valore di altre variabili a date del calendario.

D'altro canto vi è la possibilità che i consumatori si rendano conto che i propri gusti si modificheranno nel corso del tempo e che quindi pianifichino le proprie scelte assumendo di agire, in ogni istante futuro, coerentemente con i loro gusti in quel momento. Essi scelgono pertanto un programma coerente, nel senso che nel processo di pianificazione tengono conto correttamente di tutte le azioni future. Si dimostra che se la funzione di sconto dipende esclusivamente dalla distanza temporale, ciò conduce le famiglie ad agire come se avessero un tasso di preferenza temporale costante nell'arco della loro vita.

Abbiamo in tal modo individuato due possibili giustificazioni per l'ipotesi di un fattore di sconto con progressione esponenziale: essa genera programmi ottimali dinamicamente coerenti ed inoltre le famiglie che non adottano questo criterio di sconto, ma che si comportano in maniera dinamicamente coerente, agiscono come se adottassero tale criterio.

L'utilizzazione di un fattore di sconto con progressione esponenziale non è, come si è detto, l'unica procedura che garantisce la coerenza dinamica. Supponiamo che $D(\cdot)$ dipenda dal livello di utilità del consumo:

$$\int_0^\infty u(c_t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} dt.$$

Imponiamo che:

$$\theta'(\cdot) > 0, \tag{1.60}$$

cioè che un più elevato livello di consumo al tempo s implichi un più alto fattore di sconto da s in poi. È un'ipotesi in generale difficile da sostenere ma è necessaria per la stabilità.

Caratterizziamo lo steady state di questo modello. Ricordando che l'equazione di transizione è la (1.4), l'Hamiltoniano associato al problema è:

$$H(k_t, c_t, \lambda_t, t) = u(c_t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} + \lambda_t(f(k_t) - nk_t - c_t).$$

Posto $\mu_t = \lambda_t\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds}$, le condizioni (1.11) e (1.12) diventano:

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_t &= \dot{\lambda}_t\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} + \lambda_t \frac{d\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds}}{dt} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial k_t}\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} + \lambda_t\theta[u(c_t)]\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} \\
&= -\lambda_t(f'(k_t) - n)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} + \lambda_t\theta[u(c_t)]\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} \\
&= \mu_t(n - f'(k_t)) + \mu_t\theta[u(c_t)],
\end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = \theta[u(c_t)] + n - f'(k_t). \tag{1.61}$$

La condizione di trasversalità diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} k_t\lambda_t &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} k_t\mu_t \, \mathrm{e}^{-\int_0^t \theta[u(c_s)]ds} &= 0. \end{aligned} \tag{1.62}$$

In steady state abbiamo $\dot{\lambda}_t = 0$ e $\dot{k}_t = 0$, quindi:

$$\begin{aligned} \theta[u(c^*)] = f'(k^*) - n \\ c^* = f(k^*) - nk^*. \end{aligned}$$

Il luogo geometrico $dk/dt = 0$ lo abbiamo già discusso in precedenza, mentre $dc/dt = 0$ si presenta inclinato negativamente. Infatti, derivando ambo i membri per k^*, e ricordando le ipotesi (1.7), (1.9) e (1.60):

$$\begin{aligned} \theta'[u(c^*)]u'(c^*) \cdot \frac{dc^*}{dk^*} &= f''(k^*) \\ \frac{dc^*}{dk^*} &= \frac{f''(k^*)}{\theta'[u(c^*)]u'(c^*)} < 0. \end{aligned}$$

Considerando uno shock additivo sulla produttività, il quale sposta il luogo geometrico $dk/dt = 0$ uniformemente verso il basso, lo stock di capitale del nuovo equilibrio aumenta, in modo tale che la riduzione del consumo indotta dalla minore produttività sia compensata da un incremento del capitale. Nel nuovo steady state il tasso di preferenza temporale ed il tasso di interesse sono inferiori rispetto ai loro precedenti valori. Ciò contrasta nettamente con i risultati messi in luce nei paragrafi precedenti. La riduzione della produttività aveva infatti lasciato inalterato il tasso di interesse ed il consumo era diminuito in misura esattamente identica alla contrazione delle quantità prodotte.

Capitolo 2

Il modello con generazioni sovrapposte.

2.1 L'equilibrio di un'economia decentralizzata

L'economia di mercato si compone di individui ed imprese.

Gli *individui* vivono per due periodi. Un individuo nato nel periodo t consuma c_{1t} nel suo primo periodo di vita e c_{2t+1} nel periodo $t+1$, traendone un'utilità :

$$u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}), \qquad \theta \geq 0, u'(\cdot) > 0, u''(\cdot) < 0.$$

Gli individui lavorano solo nel primo periodo, offrendo (inelasticamente) una unità di lavoro ed ottenendo in cambio un salario w_t. Essi consumano soltanto una parte c_{1t} del reddito percepito nel primo periodo di vita, risparmiando il resto per finanziare il consumo c_{2t+1} del periodo successivo (periodo di pensionamento).

Il risparmio dei giovani al periodo t genera lo stock di capitale impiegato nel processo produttivo al tempo $t+1$, unitamente al lavoro offerto dai giovani nel periodo $t+1$. Il numero di individui nati e impiegati nel periodo t è N_t, La popolazione cresce al tasso n, cioè $N_t = N_0(1+n)^t$.

Il problema di ottimizzazione di un individuo nato al tempo t è quindi:

$$\max u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}),$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} c_{1t} + s_t &= w_t \\ c_{2t+1} &= (1+r_{t+1})s_t, \end{aligned}$$

in cui w_t è il salario percepito nel periodo t ed r_{t+1} è il tasso di interesse pagato sui risparmi trattenuti dal periodo t al periodo $t+1$. Nel secondo periodo ogni individuo consuma interamente la propria ricchezza, sia gli interessi che il capitale. La condizione di primo ordine per un massimo è:

$$\begin{aligned}\frac{d[u(c_{1t})+(1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})]}{ds_t} &= \frac{d[u(w_t-s_t)+(1+\theta)^{-1}u[(1+r_{t+1})s_t]]}{ds_t} \\ &= -u'(c_{1t})+(1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'(c_{2t+1})=0. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Da cui:

$$u'[w_t-s_t]-(1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t]=0,$$

la quale esprime, in forma implicita, una relazione del tipo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}). \qquad (2.2)$$

Sostituendo $s(w_t, r_{t+1})$ nella precendente:

$$u'[w_t - s(w_t,r_{t+1})] = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s(w_t,r_{t+1})],$$

e derivando poi rispetto a w ed r, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial w}=s_w &= \frac{(1+\theta)u''(c_{1t})}{u''(c_{1t})(1+\theta)+(1+r_{t+1})^2u''(c_{2t+1})} \\ \frac{\partial s}{\partial r}=s_r &= -\frac{u'(c_{2t+1})+c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t})(1+\theta)+(1+r_{t+1})^2u''(c_{2t+1})}.\end{aligned}$$

Sulla base delle ipotesi di separabilità e concavità della funzione di utilità, il risparmio risulta essere una funzione crescente del reddito da salario. È infatti agevole verificare che $0 < s_w < 1$. L'effetto di un incremento del tasso di interesse è invece ambiguo:

1. un incremento di r_{t+1} equivale ad una diminuzione del prezzo del consumo nel secondo periodo (a parità di c_{2t+1}, si rende necessario un minor livello di s_t), e questo induce gli individui a riallocare il consumo dal primo al secondo periodo ; si tratta di un tipico effetto di sostituzione fra consumo del primo periodo con consumo del secondo periodo;

2. un aumento del tasso di interesse amplia l'insieme dei panieri di consumo accessibili, rendendo possibile un incremento del consumo in entrambi i periodi; si tratta di un tipico effetto di reddito.

La risultante di questi due effetti è di direzione ambigua. Se l'elasticità di sostituzione $\sigma(c_{2t+1}, c_{1t})$ tra il consumo nei due periodi è maggiore dell'unità, allora domina l'effetto di sostituzione e un incremento nel tasso di interesse comporta un aumento del risparmio. Infatti, ricordando che $\sigma(c_{2t+1}, c_{1t}) = -u'(c_{2t+1})/c_{2t+1}u''(c_{2t+1})$, si ricava:

$$\begin{aligned}-\frac{u'(c_{2t+1})}{c_{2t+1}u''(c_{2t+1})} &> 1 \\ \frac{u'(c_{2t+1})+c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{-c_{2t+1}u''(c_{2t+1})} &> 0.\end{aligned}$$

Poiché $u''(\cdot) < 0$, si ottiene quindi:

$$u'(c_{2t+1}) + c_{2t+1}u''(c_{2t+1}) > 0,$$

da cui:

$$\frac{\partial s}{\partial r} > 0.$$

Le *imprese* agiscono in base a criteri concorrenziali ed impiegano una tecnologia con rendimenti di scala costanti $Y = F(K, N)$. Ancora una volta assumiamo che $F(\cdot)$ sia la funzione di produzione netta, che tenga già conto dell'usura del capitale. Il prodotto per lavoratore, Y/N è dato quindi da $y = f(k)$, dove f soddisfa le condizioni (1.8) e (1.9). Ciascuna impresa massimizza il profitto considerando come dati il salario w_t ed il tasso di remunerazione r_t. La soluzione di questo problema è fornita dalle (1.31) e (1.31): le imprese impiegano lavoro fino al punto in cui il prodotto marginale del lavoro è uguale al salario e impiegano capitale fino al punto in cui il prodotto marginale del capitale è uguale al suo tasso di remunerazione.

L'*equilibrio sul mercato dei beni* richiede che in ogni periodo la domanda sia uguale all'offerta. Ricordando che gli individui della generazione t percepiscono nel primo periodo di vita il monte salari $N_t w_t$, di cui una parte $N_t c_{1t}$ viene destinata al consumo ed una parte viene risparmiata per generare consumo nel periodo del pensionamento (risparmio che costituisce lo stock di capitale per il processo produttivo al periodo $t + 1$) possiamo scrivere:

$$N_t w_t = K_{t+1} + N_t c_{1t},$$

da cui, sottraendo K_t da entrambi i lati dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} K_{t+1} - K_t &= N_t w_t - N_t c_{1t} - K_t \\ K_{t+1} - K_t &= N_t s(w_t, r_{t+1}) - K_t, \end{aligned}$$

dove il termine di sinistra rappresenta l'investimento netto e quello di destra è il risparmio netto: il risparmio dei giovani meno la decumulazione del risparmio da parte dei vecchi. Eliminando ora K_t da entrambi i lati e dividendo per N_t:

$$\begin{aligned} \frac{K_{t+1}}{N_t} &= s(w_t, r_{t+1}) \\ \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} \cdot \frac{N_{t+1}}{N_t} &= s(w_t, r_{t+1}) \\ k_{t+1}(1+n) &= s(w_t, r_{t+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le condizioni di *equilibrio sul mercato dei fattori* sono invece individuate dalle (1.31) e (1.31).

L'equazione (2.3) descrive l'evoluzione nel tempo (discreto) dell'accumulazione del capitale:

$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{1+n}, \tag{2.4}$$

la quale, sfruttando le (1.31) e (1.31), diventa:

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})]}{1+n}. \tag{2.5}$$

Questa è una equazione non lineare alle differenze, o sistema dinamico non lineare in tempo discreto. Valgono quindi le proprietà enunciate in [5], pp. 220-233.

L'equilibrio di steady state è ora definito come quel punto dello spazio k_{t+1}–k_t in corrispondenza del quale $k_{t+1} = k_t$. Le ipotesi fatte sulle preferenze e sulla tecnologia non pongono molte restrizioni alla forma della (2.4): è pertanto possibile che non vi sia alcun stato stazionario, uno soltanto, o più d'uno. Senza ulteriori restrizioni sulla funzione di utilità o sulla funzione di produzione il modello non garantisce quindi ne' l'esistenza, ne' l'unicità dell'equilibrio caratterizzato da un livello positivo dello stock di capitale. Per ricavare qualche ulteriore elemento sul comportamento dinamico della (2.3), calcoliamo la derivata prima rispetto k_t del suo secondo membro:

$$\begin{aligned}
\frac{dk_{t+1}}{dk_t} &= \frac{s_w[f'(k_t) - f'(k_t) - k_t f''(k_t)] + s_r f''(k_{t+1})\frac{dk_{t+1}}{dk_t}}{1+n} \\
\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\left(1 - \frac{s_r f''(k_{t+1})}{1+n}\right) &= \frac{-s_w k_t f''(k_t)}{1+n} \\
\frac{dk_{t+1}}{dk_t} &= \frac{-s_w k_t f''(k_t)}{1+n-s_r f''(k_{t+1})}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Il segno della (2.6) è purtroppo ambiguo, infatti, mentre il numeratore è di certo positivo, il denominatore può essere positivo o negativo, dato che $s_r \gtrless 0$. Nel caso in cui è $s_r > 0$, la (2.6) è positiva.

Assumiamo che esista un unico steady state e chiamiamolo k^*. Per verificare la sua stabilità occorre procedere alla linearizzazione di (2.4) ed al calcolo degli autovalori della matrice jacobiana calcolata in k^*. La condizione di stabilità locale[(1)] richiede che l'autovalore $\lambda = dk_{t+1}/dk_t$ sia in valore assoluto minore di 1:

$$|\lambda| = \left|\frac{-s_w k_t f''(k_t)}{1+n-s_r f''(k_{t+1})}\right| < 1. \tag{2.7}$$

Nuovamente, in assenza di ulteriori restrizioni sul modello, la condizione di stabilità può essere o non essere verificata. Per ottenere risultati non ambigui sulle proprietà dinamiche del modello e degli equilibri di steady state è necessario o ipotizzare specifiche forme funzionali della funzione di utilità o della funzione di produzione, oppure imporre opportune condizioni sufficienti a garantire l'unicità di un equilibrio di steady state con livello positivo dello stock di capitale.

[1] Imponendo che:

$$0 < \lambda = \frac{-s_w k_t f''(k_t)}{1+n-s_r f''(k_{t+1})} < 1$$

l'equilibrio è non solo stabile ma anche non oscillatorio. In tal caso l'economia si muove monotonicamente verso lo steady state.

2.1.1 Proprietà di ottimalità

Vogliamo ora confrontare l'allocazione determinata dal mercato con quella che sarebbe imposta da un pianificatore centrale che massimizzi una funzione intertemporale di benessere sociale. Trascurando tutta la discussione relativa alla definizione di una 'corretta' funzione di benessere sociale, assumiamo inizialmente che il pianificatore sconti l'utilità delle generazioni future ad un tasso 'sociale' R e che sia interessato solamente all'utilità delle prime $T+1$ generazioni correnti e future. Ciò significa che la funzione di benessere sociale ha la forma:

$$U = (1+\theta)^{-1}u(c_{20}) + \sum_{t=0}^{T-1}(1+R)^{-t-1}[u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})]. \tag{2.8}$$

Se il pianificatore è meno interessato alle generazioni future, R è positivo, mentre se è egualmente interessato al benessere di tutte le generazioni $R = 0$. Se invece egli pondera l'utilità di ciascuna generazione in base alla sua dimensione $(1+R)^{-1} = (1+n)$, quindi R risulta negativo.

Il vincolo sulle risorse che il pianificator si trova a dover fronteggiare è:

$$K_t + F(K_t, N_t) = K_{t+1} + N_t c_{1t} + N_{t-1}c_{2t}. \tag{2.9}$$

L'offerta totale di beni viene distribuita fra stock di capitale per il periodo successivo, consumo dei giovani e consumo dei vecchi. Dividendo tutto per N_t:

$$k_t + f(k_t) = (1+n)k_{t+1} + c_{1t} + (1+n)^{-1}c_{2t}. \tag{2.10}$$

Il problema del pianificatore è quindi quello di massimizzare la (2.8) sotto il vincolo rappresentato dalla (2.10) e con k_0 e k_{T+1} dati.

Dalla (2.10) si ricava che c_{1t} vale:

$$c_{1t} = k_t + f(k_t) - (1+n)k_{t+1} - (1+n)^{-1}c_{2t}.$$

Questa relazione, sostituita nella (2.8) per $t = 0, \dots, T-1$, trasforma il problema di ottimo vincolato in uno non vincolato. Raccogliendo i termini che comprendono c_{2t} o k_t, si ricava:

$$\begin{aligned}
&\dots + (1+R)^{-t}u(c_{1t-1}) + (1+R)^{-t}(1+\theta)^{-1}u(c_{2t}) + (1+R)^{-t-1}u(c_{1t}) + \dots \\
&= \dots + (1+R)^{-t}u[k_{t-1} + f(k_{t-1}) - (1+n)k_t - (1+n)^{-1}c_{2t-1}] + \\
&+(1+R)^{-t-1}u[k_t + f(k_t) - (1+n)k_{t+1} - (1+n)^{-1}c_{2t}] + (1+R)^{-t}(1+\theta)^{-1}u(c_{2t}) + \dots
\end{aligned}$$

Derivando ora rispetto a c_{2t} e k_t, otteniamo le condizioni di prim'ordine:

$$\begin{aligned}
-(1+R)^{-t-1}(1+n)^{-1}u'(c_{1t}) + (1+R)^{-t}(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) &= 0 \\
-(1+R)^{-t}(1+n)u'(c_{1t-1}) + (1+R)^{-t-1}[1+f'(k_t)]u'(c_{1t}) &= 0,
\end{aligned}$$

cioè:

$$-(1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) = 0 \tag{2.11}$$

$$-(1+n)u'(c_{1t-1}) + (1+R)^{-1}[1+f'(k_t)]u'(c_{1t}) = 0. \tag{2.12}$$

La (2.11) può essere così riformulata:

$$\frac{(1+R)^{-1}u'(c_{1t})}{(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t})} = (1+n),$$

essa stabilisce che il tasso marginale di sostituzione (dal punto di vista del pianificatore) fra consumo dei giovani e consumo dei vecchi nel periodo t deve essere uguale ad $1+n$, il tasso di sostituzione.

L'equazione (2.12) è invece una condizione di allocazione intertemporale ottimale analoga alla (1.20): una diminuzione del consumo al tempo $t-1$ comporta una riduzione dell'utilità pari $u'(c_{1t-1})$, ma rende possibile, grazie all'accumulazione di capitale, un incremento di utilità in misura data da $(1+n)^{-1}[1+f'(k_t)]u'(c_{1t})$. Questo incremento, attualizzato al tempo $t-1$, in base al fattore di sconto sociale $(1+R)^{-1}$ deve essere uguale alla diminuzione iniziale.

Combinando la (2.11) con la (2.12), si ottiene facilmente:

$$u'(c_{1t-1}) = [1+f'(k_t)](1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}),$$

che non è altro che la condizione di primo ordine (2.1), posto $r_t = f'(k_t)$. Dato che il pianificatore massimizza il benessere ponderato di diverse generazioni, non è sorprendente che egli allochi il consumo nell'ambito della vita di un singolo individuo esattamente come farebbe quest'ultimo.

Indichiamo ora con c_1^*, c_2^* e k^* i valori di steady state di c_1, c_2 e k rispettivamente. Essi soddisfano ovviamente le condizioni (2.11) e (2.12):

$$\begin{aligned} -(1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_1^*) + (1+\theta)^{-1}u'(c_2^*) &= 0 \\ -(1+n)u'(c_1^*) + (1+R)^{-1}[1+f'(k^*)]u'(c_1^*) &= 0, \end{aligned}$$

cioè:

$$(1+\theta)^{-1}u'(c_2^*) = (1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_1^*) \quad (2.13)$$

$$1+f'(k^*) = (1+R)(1+n). \quad (2.14)$$

Il livello di steady state dello stock di capitale soddisfa quindi la golden rule modificata. Se R ed n non sono troppo grandi ($R \cdot n \approx 0$), la (2.14) implica che, con buona approssimazione, $f'(k^*) = R + n$, cioè il prodotto marginale del capitale è uguale alla somma del tasso di sconto sociale e del tasso di crescita della popolazione. Se $R = 0$, ossia se il pianificatore attribuisce lo stesso peso all'utilità di tutte le generazioni, il prodotto marginale del capitale è semplicemente pari ad n: lo steady state coincide con quello previsto dalla golden rule, in corrispondenza del quale risulta massimizzato il livello di steady state del consumo pro capite.

Vediamo ora di derivare il comportamento del modello in prossimità dello stato stazionario. Le equazioni da considerare sono le (2.10), (2.11) e (2.12).

La (2.11) implica l'esistenza di un legame fra c_{2t} e c_{1t}, quindi può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{u'[c_{2t}(c_{1t})]}{(1+\theta)} - \frac{u'(c_{1t})}{(1+R)(1+n)} = 0,$$

da cui:

$$u'[c_{2t}(c_{1t})] = \frac{(1+\theta)u'(c_{1t})}{(1+R)(1+n)}.$$

La derivata di c_{2t} rispetto c_{1t} è pertanto:

$$c'_{2t} = \frac{dc_{2t}}{dc_{1t}} = \frac{(1+\theta)u''(c_{1t})}{(1+R)(1+n)u''(c_{2t})}. \tag{2.15}$$

Riscrivendo la (2.10) nel seguente modo:

$$k_{t+1} = \frac{k_t + f(k_t) - c_{1t} - (1+n)^{-1}c_{2t}}{(1+n)},$$

si possono agevolmente ricavare le derivate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} &= \frac{1+f'(k_t)}{(1+n)} \\
\frac{\partial k_{t+1}}{\partial c_{1t}} &= \frac{-1-(1+n)^{-1}c'_{2t}}{(1+n)} = -(1+n)^{-1}\left(1+\frac{(1+\theta)u''(c_{1t})}{(1+R)(1+n)^2u''(c_{2t})}\right).
\end{aligned}$$

Dalla (2.12) si ricava:

$$u'(c_{1t+1}) = \frac{(1+n)(1+R)u'(c_{1t})}{1+f'(k_{t+1})},$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{1t+1}}{\partial k_t} &= -\frac{(1+n)(1+R)u'(c_{1t})f''(k_{t+1})\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}}{[1+f'(k_{t+1})]^2u''(c_{1t+1})} \\
\frac{\partial c_{1t+1}}{\partial c_{1t}} &= (1+n)(1+R)\cdot\frac{u''(c_{1t})[1+f'(k_{t+1})]-u'(c_{1t})f''(k_{t+1})\frac{\partial k_{t+1}}{\partial c_{1t}}}{[1+f'(k_{t+1})]^2u''(c_{1t+1})}.
\end{aligned}$$

Ricordando la (2.14), lo jacobiano relativo al sistema di equazioni alle differenze definito dalle (2.10) e (2.12):

$$k_{t+1} = g(k_t, c_{1t}) \tag{2.16}$$

$$c_{1t+1} = h(k_t, c_{1t}). \tag{2.17}$$

calcolato nel punto stazionario (k^*, c_1^*), vale:

$$J(k^*, c_1^*) = \begin{bmatrix} 1+R & -\frac{1}{1+n}\cdot\left(1+\frac{(1+\theta)u''_1}{(1+n)(1+f')u''_2}\right) \\ -\frac{u'_1f''}{(1+n)u''_1} & 1+\frac{u'_1f''}{(1+n)(1+f')u''_1}\cdot\left(1+\frac{(1+\theta)u''_1}{(1+n)(1+f')u''_2}\right) \end{bmatrix},$$

dove $f' \equiv f'(k^*)$, $f'' \equiv f''(k^*)$, $u'_1 \equiv u'(c_1^*)$ e $u''_i \equiv u''(c_i^*)$, con $i = 1, 2$.

Ponendo $a_1 \equiv 1 + \frac{(1+\theta)u''_1}{(1+n)(1+f')u''_2}$ e $a_2 \equiv \frac{u'_1f''}{(1+n)(1+f')u''_1}$, abbiamo:

$$J(k^*, c_1^*) = \begin{bmatrix} 1+R & -(1+n)^{-1}a_1 \\ -a_2(1+n)(1+R) & (1+a_1a_2) \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori dello jacobiano quindi valgono:

$$\lambda_1 = \frac{\mathrm{Tr}(J) + \sqrt{\mathrm{Tr}^2(J) - 4\mathrm{Det}(J)}}{2} = \frac{2+R+a+\sqrt{(2+R+a)^2-4(1+R)}}{2} \tag{2.18}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mathrm{Tr}(J) - \sqrt{\mathrm{Tr}^2(J) - 4\mathrm{Det}(J)}}{2} = \frac{2+R+a-\sqrt{(2+R+a)^2-4(1+R)}}{2}. \tag{2.19}$$

dove:

$$a \equiv a_1 a_2 = \frac{u_1' f''}{(1+n)(1+f')u_1''} \cdot \left[1 + \frac{(1+\theta)u_1''}{(1+n)(1+f')u_2''}\right] > 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{a+R+\sqrt{(a+R)^2+4a}}{2} > 1 + (a+R) > 1+R \\ 0 < \lambda_2 &= 1 + \frac{a+R-\sqrt{(a+R)^2+4a}}{2} < 1 \end{aligned}$$

La linearizzazione di (2.16) e (2.17) risulta essere[(2)]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_{t+1} \\ c_{1t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g(k^*, c_1^*) \\ h(k^*, c_1^*) \end{pmatrix} + J(k^*, c_1^*) \cdot \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ c_{1t} - c_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^* \\ c_1^* \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1+R & -(1+n)^{-1}a_1 \\ -a_2(1+n)(1+R) & (1+a_1a_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ c_{1t} - c_1^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè:

$$k_{t+1} - k^* = (1+R)(k_t - k^*) - a_1(1+n)^{-1}(c_{1t} - c_1^*) \tag{2.20}$$

$$c_{1t+1} - c_1^* = -a_2(1+n)(1+R)(k_t - k^*) + (1+a)(c_{1t} - c_1^*). \tag{2.21}$$

Con semplici passaggi algebrici si scrive:

$$\begin{aligned} (k_{t+1} - k^*) - (1+R)(k_t - k^*) &= -a_1(1+n)^{-1}(c_{1t} - c_1^*) \\ -(1+a)(k_t - k^*) &= -(1+a)[(1+R)(k_{t-1} - k^*) + a_1(1+n)^{-1}(c_{1t-1} - c_1^*)], \end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} &(k_{t+1} - k^*) - (2+R+a)(k_t - k^*) = \\ &\quad = -a_1(1+n)^{-1}[c_{1t} - c_1^* - (1+a)(c_{1t-1} - c_1^*)] - (1+a)(1+R)(k_{t-1} - k^*). \end{aligned}$$

[2]Va ricordato che nel punto stazionario l'evoluzione è tale per cui $(k_t, c_{1t}) = (k^*, c_1^*)$ per ogni t. Quindi in corrispondenza di esso vale:

$$\begin{aligned} k^* = k_{t+1} &= g(k_t, c_{1t}) = g(k^*, c_1^*) \\ c_1^* = c_{1t+1} &= h(k_t, c_{1t}) = h(k^*, c_1^*). \end{aligned}$$

Ricorrendo alla (2.21) si ricava infine:

$$\begin{aligned}
&(k_{t+1} - k^*) - (2 + R + a)(k_t - k^*) + (1 + R)(k_{t-1} - k^*) = \\
&\quad = -a_1(1 + n)^{-1}[-a_2(1 + n)(1 + R)(k_{t-1} - k^*)] - a(1 + R)(k_{t-1} - k^*) \\
&\quad = a(1 + R)(k_{t-1} - k^*) - a(1 + R)(k_{t-1} - k^*) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione alle differenze di secondo ordine in termini della deviazione dello stock di capitale dal suo valore di steady state $(k_t - k^*)$:

$$(k_{t+1} - k^*) - (2 + R + a)(k_t - k^*) + (1 + R)(k_{t-1} - k^*) = 0. \tag{2.22}$$

La sua soluzione è :

$$k_t - k^* = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t, \tag{2.23}$$

dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori dello jacobiano definiti rispettivamente dalle (2.18) e (2.19), mentre c_1 e c_2 sono costanti determinate dalle condizioni al contorno k_0 e k_{T+1}:

$$k_0 - k^* = c_1 + c_2 \tag{2.24}$$

$$k_{T+1} - k^* = c_1\lambda_1^{T+1} + c_2\lambda_2^{T+1}. \tag{2.25}$$

Per valori di T elevati, λ_1^{T+1} risulta essere molto grande, dato che $\lambda_1 > 1$. Affinché la (2.25) sia soddisfatta è pertanto necessario che c_1 sia prossimo a zero. Questo, a sua volta, in base alla (2.25), implica che c_2 sia prossimo a $(k_0 - k^*)$. Supponendo che il valore dello stato iniziale e terminale di k siano inferiori a quello di steady state (di modo che $(k_0 - k^*)$ e $(k_{T+1} - k^*)$ siano negativi), per T elevato, il sentiero di accumulazione del capitale prevede che lo stock sia vicino al proprio livello stazionario (quello specificato dalla golden rule modificata) per un lungo periodo. Osservando la (2.23), si vede che, nei primi istanti, $k_t - k^* \approx (k_0 - k^*)\lambda_2^t$ e quindi il capitale cresce rapidamente dal valore k_0 fino ad un valore molto vicino a k^*. Negli ultimi istanti, quando t è diventato molto grande, k_t si allontana repentinamente dal valore k^* per portarsi sulla condizione finale k_{T+1}. Questa caratteristica del sentiero ottimo è nota come '*proprietà dell'autostrada*' (turnpike): se T è elevato, il modo migliore per portarsi da k_0 ad un qualsiasi valore terminale k_{T+1} è quello di mantenersi prossimi al valore k^* per un lungo intervallo di tempo. Il teorema dell'autostrada chiarisce l'importanza dal punto di vista normativo della golden rule modificata: anche nel caso di orizzonte finito, l'economia dovrebbe operare per la maggior parte del tempo con uno stock di capitale che si avvicina a quello previsto dalla golden rule modificata.

Nel caso poi in cui T diviene infinitamente grande ed R è negativo, la somma U definita in (2.8) non converge in quanto all'utilità delle generazioni future viene attribuito un peso via via crescente. Ciò è inoltre vero per $R = 0$. In quest'ultimo caso però il problema dell'ottimalità può essere trattato utilizzando il criterio del sorpasso (si veda l'appendice A.2). Lo stesso vale per $R > 0$. Pertanto se R è non negativo, il sentiero ottimale converge nel corso del tempo, da k_0 a k^*, ossia al livello dello stock di capitale previsto dalla golden rule. Se il pianificatore attribuisce il medesimo peso a tutte le generazioni $(R = 0)$, l'economia tende alla golden rule e quindi, in steady state, risulta massimizzato il livello del consumo pro capite.

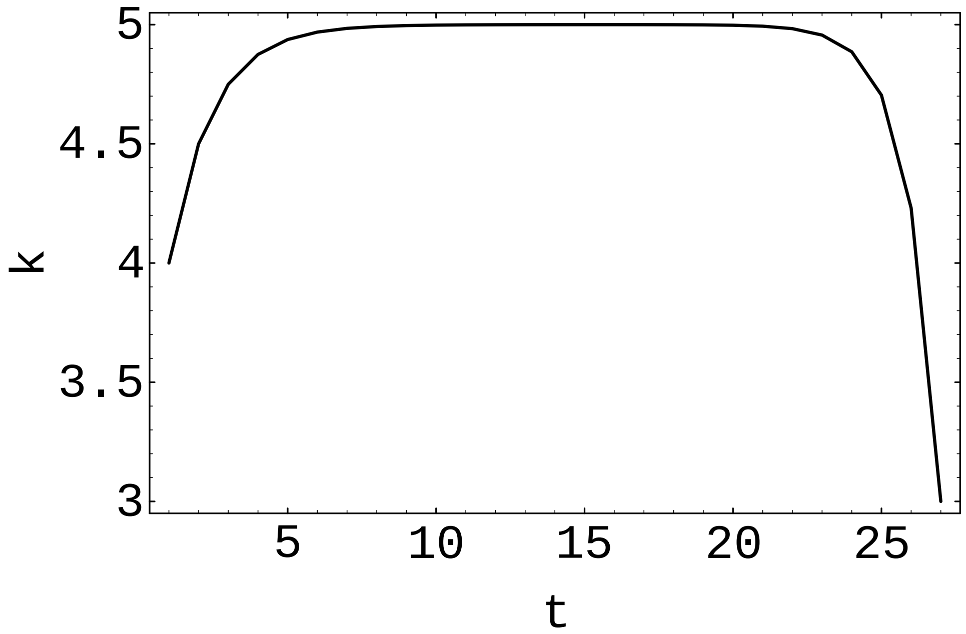

Fig. 2.1. La proprietà dell'autostrada.

Abbiamo quindi visto che, per $R > 0$, il sentiero ottimo di un'economia pianificata è caratterizzato dalla convergenza verso uno steady state in cui $1 + f'(k^*) = (1+n)(1+R)$. Essendo R un parametro arbitrario, in alcun modo collegato alle preferenze degli operatori, non ci sorprende quindi se k^* in generale non coincide con il livello di steady state dello stock di capitale di un'economia decentralizzata.

È interessante chiedersi se uno steady state che non soddisfi la (2.14) possa almeno essere Pareto ottimale, cioè se non sia possibile una riallocazione delle risorse che migliori il benessere di taluni agenti, senza peggiorare quello di alcuno degli altri. Per rispondere a questa domanda riprendiamo l'equazione (2.10) relativa all'accumulazione di capitale, e definiamo il consumo totale:

$$c_t = c_{1t} + (1+n)^{-1} c_{2t}.$$

La (2.10) diventa:

$$c_t = k_t + f(k_t) - (1+n)k_{t+1}. \tag{2.26}$$

Questa equazione implica che in steady state:

$$f(k^*) - nk^* = c^*.$$

Consideriamo gli effetti su c^* di una variazione di k^*:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - n \gtrless 0.$$

Questo ci fa capire l'importanza della golden rule: se lo stock di capitale di steady state eccede il livello previsto dalla golden rule ($f'(k^*) < n$ e quindi $dc^*/dk^* < 0$), una riduzione dello stock di capitale permette di incrementare il consumo di steady state. Lo stock di capitale è infatti tanto elevato che la sua produttività è insufficiente a controbilanciare l'ammontare di risorse necessario alla costituzione dello stock di capitale pro capite per i nuovi nati: l'economia vacilla sotto l'onere di dover mantenere costante il capiatel pro capite. Ciò suggerisce che *gli equilibri di steady state caratterizzati da uno stock di capitale superiore a quello previsto dalla golden rule non sono Pareto ottimali.*

Vediamo di dimostrare questo fatto. Ipotizziamo che al tempo t l'economia sia in steady state e che si verifichi un aumento del consumo con una conseguente riduzione dell'accumulazione di capitale: da $t+1$ in poi lo stock di capitale risulta permanentemente più basso ($dk < 0$). L'equazione (2.26) considerata al tempo t implica quindi che:

$$dc_t = -(1+n)dk > 0.$$

Per i periodi successivi si ha poi:

$$dc_{t+i} = (f' - n)\, dk > 0 \qquad \text{se} \quad f' < n \quad \text{(sovraccumulazione di capitale)}, \qquad i > 0.$$

Il consumo totale aumenta quindi da t in poi. Se tale incremento viene suddiviso fra c_1 e c_2 in ogni periodo, l'utilità di ciascuna generazione aumenta. Quindi l'allocazione delle risorse di economie centralizzate caratterizzate da uno stock di capitale superiore a quello richiesto dalla golden rule non è Pareto ottima: è possibile incrementare il benessere di ciascuno riducendo lo stock di capitale. Spesso si dice che tali economie sono *dinamicamente inefficienti*, esse hanno sovraccumulato capitale. Il risultato qui enunciato dipende però dall'ipotesi che l'economia sia eterna, cioè che non vi sia un'ultima generazione. Se vi fosse, la riallocazione le attribuirebbe un minor stock di capitale e quindi un minor consumo.

La sovraccumulazione di capitale non è certamente solo una curiosità teorica. Consideriamo a titolo d'esempio le funzioni di utilità e di produzione del tipo Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} U &= \ln c_1 + (1+\theta)^{-1} \ln c_2 \\ f(k) &= Ak^{\alpha} - \delta k, \end{aligned}$$

dove δ è il tasso di deprezzamento del capitale e $f(\cdot)$ è il prodotto netto. Tenendo conto dei vincoli $c_{1t} + s_t = w_t$ e $c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t$, possiamo scrivere U nel seguente modo:

$$U = \ln(w^* - s^*) + (1+\theta)^{-1} \ln[(1+r^*)s^*],$$

e quindi:

$$\frac{dU}{ds^*} = -\frac{1}{w^* - s^*} + \frac{1+r^*}{(1+\theta)(1+r^*)s^*}.$$

La condizione di primo ordine $dU/ds^* = 0$ è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^* - w^*} + \frac{1}{(1+\theta)s^*} &= 0 \\ \frac{(2+\theta)s^* - w^*}{(s^* - w^*)(1+\theta)s^*} &= 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto di quest'ultima relazione e delle (1.31) e (2.3):

$$\begin{aligned} s = \frac{w^*}{2+\theta} &= (1+n)k^* \\ \frac{f(k^*) - k^* f'(k^*)}{2+\theta} &= (1+n)k^* \\ \frac{Ak^{*\alpha} - \delta k^* - k^*(A\alpha k^{*\alpha-1} - \delta)}{2+\theta} &= (1+n)k^* \\ \frac{Ak^{*\alpha}(1-\alpha)}{2+\theta} &= (1+n)k^*, \end{aligned}$$

da cui:

$$k^{*\alpha-1} = \frac{(1+n)(2+\theta)}{A(1-\alpha)}.$$

Tenendo poi conto (1.32) si ha:

$$\begin{aligned} A\alpha k^{*\alpha-1} - \delta &= r^* \\ k^{*\alpha-1} &= \frac{\delta + r^*}{A\alpha}. \end{aligned}$$

Segue:

$$\begin{aligned}\frac{\delta + r^*}{A\alpha} &= \frac{(1+n)(2+\theta)}{A(1-\alpha)} \\ r^* &= \frac{\alpha(1+n)(2+\theta)}{(1-\alpha)} - \delta.\end{aligned}$$

Valori ragionevoli dei parametri sono coerenti sia con $r^* > n$, sia con $r^* < n$. È evidente allora come l'inefficienza dinamica non possa essere relegata al campo delle rarità.

2.1.2 L'economia di mercato e l'altruismo

Sino ad ora abbiamo ipotizzato che i consumatori siano interessati esclusivamente al proprio benessere e che non intendano lasciare alcuna eredità. In questo paragrafo analizziamo inizialmente le implicazioni delle eredità sull'accumulazione di capitale e sull'efficienza dinamica dell'economia. Successivamente esaminiamo le conseguenze di un *altruismo bilaterale*, in base al quale non solo i genitori sono attenti al benessere dei figli , ma anche i figli a quello dei genitori.

Il modo in cui incorporiamo nel modello l'interesse dei genitori per i figli è tramite l'inserimento, con un'opportuna ponderazione, dell'utilità dei figli nella funzione di utilità dei genitori. Chiamiamo V_t l'utilità della generazione nata al tempo t:

$$V_t = u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}) + (1+R)^{-1}V_{t+1}. \tag{2.27}$$

Ogni generazione si preoccupa della propria utilità e di quella della generazione successiva, quest'ultima scontata al tasso $R > 0$. Attraverso semplici sostituzioni si ricava:

$$\begin{aligned} V_t &= u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}) + (1+R)^{-1}[u(c_{1t+1}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+2}) + (1+R)^{-1}V_{t+2}] \\ &= u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}) + (1+R)^{-1}[u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})] + \\ &+ (1+R)^{-2}[u(c_{1t+2}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+3}) + (1+R)^{-1}V_{t+3}], \end{aligned}$$

e così via. Quindi:

$$V_t = \sum_{t=0}^{\infty}(1+R)^{-i}[u(c_{1t+i}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+i+1})]. \tag{2.28}$$

Va qui osservata la notevole somiglianza fra questa funzione obiettivo e quella del problema del pianificatore (2.8). Benchè ogni generazione si preoccupi soltanto della successiva, la sequenza di legami intergenerazionali fa sì che ciascuna generazione agisca come se fosse interessata all'utilità di tutte le generazioni future.

Per quanto concerne i vincoli cui è soggetta la generazione al tempo t, va tenuto conto che ogni individuo riceve nel primo periodo di vita il salario più l'eredità lasciata dai genitori, mentre nel secondo lascia un'eredità ai propri figli. Pertanto:

$$\begin{aligned} c_{1t} + s_t &= w_t + b_t \qquad (2.29) \\ c_{2t+1} + (1+n)b_{t+1} &= (1+r_{t+1})s_t \qquad (2.30) \\ b_t &\geq 0 \qquad \forall\ t, \qquad (2.31) \end{aligned}$$

dove b_t è l'eredità ricevuta da ciascun membro della t-esima generazione, corrispondente ad un lascito pari a $(1+n)b_t$ da parte di ciascun individuo della generazione $t-1$. Le eredità devono essere non negative.

Dato che i mercati sono concorrenziali valgono ancora le (1.31) e (1.32). A sua volta, l'equilibrio sul mercato dei beni conduce ancora all'equazione di accumulazione (2.10).

Vediamo ora di ricavare le condizioni di primo ordine per il problema di massimizzazione che deve affrontare un individuo nato al tempo t. Derivando rispetto s_t e tenendo conto dei vincoli:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sum_{t=0}^{\infty}(1+R)^{-i}\left(u[w_{t+i}+b_{t+i}-s_{t+i}]+(1+\theta)^{-1}u[(1+r_{t+i+1})s_{t+i}-(1+n)b_{t+i+1}]\right)}{ds_t} &= 0 \\
-u'(c_{1t})+(1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'(c_{2t+1}) &= 0,
\end{aligned}$$

e quindi:

$$u'(c_{1t})=(1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'(c_{2t+1}). \tag{2.32}$$

Se $b_{t+1}=0$, derivando rispetto b_{t+1} si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sum_{t=0}^{\infty}(1+R)^{-i}\left(u[w_{t+i}+b_{t+i}-s_{t+i}]+(1+\theta)^{-1}u[(1+r_{t+i+1})s_{t+i}-(1+n)b_{t+i+1}]\right)}{db_{t+1}} &\leq 0 \\
(1+R)^{-1}u'(c_{1t+1})-(1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1}) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Segue:

$$(1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1})\geq(1+R)^{-1}u'(c_{1t+1}). \tag{2.33}$$

Nel caso in cui $b_{t+1}>0$, la condizione di primo ordine diventa:

$$(1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1})=(1+R)^{-1}u'(c_{1t+1}).$$

Ricordando che $r_t=f'(k_t)$ ed assumendo che le eredità siano positive, queste condizioni sono identiche a quelle di un'economia pianificata (2.11) e (2.12). È questo un risultato apparentemente molto forte: un'economia di mercato, in cui gli individui abbiano una motivazione a lasciare eredità nel senso espresso dalla (2.27), ed in cui i lasciti abbiano effettivemente luogo, si comporta come un'economia pianificata. In tal caso il livello dello stock di capitale di setady state è quello previsto dalla golden rule modificata, in cui il tasso di sconto rilevante diviene quello applicato dai genitori all'utilità dei propri figli; il modello con generazioni sovrapposte si comporta in modo quasi identico a quello di Ramsey.

Volgiamo ora la nostra attenzione al vincolo di non negatività dei lasciti ereditari (2.31) ed esaminiamone le implicazioni in corrispondenza dello steady state. Tenendo conto che nel punto stazionario $c_{1t}=c_{1t+1}=c^*$, dalla combinazione della (2.32) con la (2.33) si ha:

$$\begin{array}{lcll}
(1+r^*) & \leq & (1+n)(1+R) & \text{se} \quad b^*=0 \\
(1+r^*) & = & (1+n)(1+R) & \text{se} \quad b^*\geq 0.
\end{array} \tag{2.34}$$

In steady state è possibile sia che le eredità siano positive, caso in cui il tasso di interesse è uguale a quello previsto dalla golden rule modificata, sia che non vi siano eredità, caso in cui il tasso di interesse è inferiore rispetto a quello della golden rule modificata. Non vi è nulla che imponga al tasso di interesse di essere maggiore del tasso di crescita della popolazione ($f'(k_t) > n$) e che quindi assicuri l'efficienza dinamica dell'economia.

Consideriamo un'economia in cui gli individui abbiano un movente a lasciare eredità e scontino il benessere della generazione futura ad un tasso R, ma in cui esistono norme che impediscono i lasciti ereditari. In tal caso l'equilibrio coincide con quello dell'economia decentralizzata vista nel paragrafo 2.1. Supponiamo che il tasso di interesse di equilibrio $1 + r^*$ sia inferiore a $(1+n)(1+R)$. Se in tale condizione viene rimosso il divieto a lasciare eredità, gli individui non sono però incentivati a lasciarne: un piccolo incremento dei lasciti ereditari comporta infatti una variazione dell'utilità pari a:

$$\begin{aligned}
\frac{dV^*}{db^*} &= (1+R)^{-1}u'(c_1^*) - (1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_2^*) \\
&= (1+R)^{-1}u'(c_1^*) - (1+\theta)^{-1}(1+n)(1+\theta)(1+r^*)^{-1}u'(c_1^*) \\
&= (1+n)(1+r^*)^{-1}u'(c_1^*)\left[\frac{1+r^*}{(1+n)(1+R)} - 1\right] < 0.
\end{aligned}$$

Quindi in un'economia in cui il tasso di interesse di equilibrio $1+r^*$, sotto il vincolo di assenza di lasciti, è inferiore a $(1+n)(1+R)$, la rimozione del vincolo non incentiva gli individui a lasciare eredità e non comporta variazioni del tasso di interesse.

In sintesi, la condizione di non negatività delle eredità attenua notevolmente le affermazioni precedenti sull'equivalenza fra un'economia di mercato in cui gli agenti siano motivati a lasciare eredità e un'economia pianificata. L'esistenza di un movente all'eredità implica che il tasso di interesse di steady state $1 + r^* = 1 + f(k^*)$ non possa essere maggiore di quello previsto dalla golden rule modificata $(1 + n)(1 + R)$: lo stock di capitale non può essere troppo basso. Se l'equilibrio in assenza di lasciti prevedesse un tasso di interesse maggiore rispetto a quello della golden rule modificata, gli agenti lascerebbero eredità fino ad eguagliare tali valori: in equilibrio i lasciti presenterebbero valori positivi. La presenza di moventi all'eredità tuttavia, come s'è visto, non esclude che il tasso di interesse possa essere inferiore ad $(1 + n)(1 + R)$ e quindi non esclude la possibilità che l'economia sia dinamicamente inefficiente. Quando i genitori incorporano l'utilità dei figli nella propria funzione di utilità, e vi attribuiscono un'importanza tale da indurli a lasciare eredità, l'equilibrio diviene efficiente. Lo steady state dell'economia coincide con quello previsto dalla golden rule.

Nella realtà esistono trasferimenti intergenerazionali in entrambe le direzioni, dai genitori ai figli e dai figli ai genitori. Ci si può chiedere se questo altruismo bilaterale assicuri che gli equilibri siano Pareto ottimali. Come vedremo, ciò non è necessariamente vero.

Indichiamo con W_t l'utilità diretta della t-esima generazione:

$$W_t = u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}).$$

In presenza di altruismo bilaterale la funzione di utilità di una generazione non è influenzata soltanto dall'utilità della generazione successiva (i figli), ma anche da quella della precedente (i genitori). Si può quindi formulare la funzione di utilità nel modo seguente:

$$V_t = W_t + (1+R)^{-1}V_{t+1} + (1+\varphi)^{-1}V_{t-1}, \tag{2.35}$$

in cui $(1+\varphi)^{-1}$ è il peso che ogni generazione attribuisce all'utilità dei propri genitori.

Posto $a = (1+R)^{-1}$ e $b = (1+\varphi)^{-1}$, la (2.35) può essere vista come una equazione alle differenze del secondo ordine completa:

$$aV_{t+1} - V_t + bV_{t-1} = -W_t,$$

cui è associata l'equazione caratteristica $ax^2 - x + b = 0$ dotata di soluzioni:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a}.$$

Si dimostra facilmente che, sotto le condizioni:

$$a + b < 1 \qquad \text{e} \qquad ab < \frac{1}{4},$$

si ha che λ_1 e λ_2 sono radici reali ed inoltre $\lambda_1 > 1$ e $\lambda_2 < 1$.

Consideriamo ora le condizioni di primo ordine del problema di ottimo di un individuo che massimizzi la:

$$\begin{aligned} V_t &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i[u(c_{1t+i}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+i+1})] \\ &= \ldots + \gamma_1(1+\theta)^{-1}u(c_{2t}) + \gamma_0[u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})] + \gamma_1 u(c_{1t+1}) + \ldots \end{aligned}$$

sotto i vincoli di bilancio:

$$c_{1t} = w_t + b_t - g_t - s_t \tag{2.36}$$

$$c_{2t+1} = s_t(1+r_{t+1}) - (1+n)b_{t+1} + (1+n)g_{t+1}, \tag{2.37}$$

dove g_t indica la donazione, effettuata nel periodo t, di un individuo giovane ai propri genitori.

Derivando V_t rispetto s_t ed utilizzando le (2.36) e (2.37):

$$\frac{\partial V_t}{\partial s_t} = \gamma_0[-u'(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'(c_{2t+1})] = 0$$

$$u'(c_{1t}) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'(c_{2t+1}). \tag{2.38}$$

Nel presente modello a generazioni sovrapposte ciascun individuo ha $1+n$ figli ed un solo genitore. Nello stabilire le proprie donazioni, egli può quindi considerare come dato il comportamento dei propri fratelli o sorelle (ed ignorare le donazioni da questi conferiti ai genitori), oppure può agire in modo cooperativo con essi. Nel primo caso l'individuo nato al tempo t considera che l'utilità dei propri genitori sia data da:

$$c_{2t} = s_{t-1}(1+r_t) - (1+n)b_t + g_t,$$

mentre nel secondo caso:

$$c_{2t} = s_{t-1}(1+r_t) - (1+n)b_t + (1+n)g_t.$$

Assumendo come vera la prima di queste ipotesi, e derivando la funzione di utilità rispetto g_t, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial g_t} = -\gamma_0 u'(c_{1t}) + \gamma_{-1}(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) = 0 & \text{se } g_t > 0 \\ \frac{\partial V_t}{\partial g_t} = -\gamma_0 u'(c_{1t}) + \gamma_{-1}(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) \leq 0 & \text{se } g_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(c_{1t}) = \frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0}(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) & \text{se } g_t > 0 \\ u'(c_{1t}) \geq \frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0}(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) & \text{se } g_t = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Derivando infine rispetto b_{t+1}:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial b_{t+1}} = \gamma_1 u'(c_{1t+1}) - \gamma_0(1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1}) = 0 & \text{se } b_{t+1} > 0 \\ \frac{\partial V_t}{\partial b_{t+1}} = \gamma_1 u'(c_{1t+1}) - \gamma_0(1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1}) \leq 0 & \text{se } b_{t+1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}u'(c_{1t+1}) & \text{se } b_{t+1} > 0 \\ (1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_{2t+1}) \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_0}u'(c_{1t+1}) & \text{se } b_{t+1} = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

Analizziamo queste tre condizioni in corrispondenza dello steady state:

$$\begin{aligned} u'(c_1^*) &= (1+\theta)^{-1}(1+r^*)u'(c_2^*) \\ u'(c_1^*) &\geq \frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0}(1+\theta)^{-1}u'(c_2^*) \\ (1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_2^*) &\geq \frac{\gamma_1}{\gamma_0}u'(c_1^*). \end{aligned}$$

Esse implicano che:

$$\begin{aligned} (1+\theta)^{-1}(1+r^*)u'(c_2^*) &\geq \frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0}(1+\theta)^{-1}u'(c_2^*) \\ 1+r^* &\geq \frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0}, \end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} (1+\theta)^{-1}(1+n)u'(c_2^*) &\geq \frac{\gamma_1}{\gamma_0}(1+\theta)^{-1}(1+r^*)u'(c_2^*) \\ (1+n) &\geq \frac{\gamma_1}{\gamma_0}(1+r^*) \\ 1+r^* &\leq (1+n)\frac{\gamma_0}{\gamma_1}. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{-1}}{\gamma_0} \leq &\ 1+r^* &\leq (1+n)\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \\
\frac{A^{-1}\lambda^{-1}}{A^{-1}} \leq &\ 1+r^* &\leq (1+n)\frac{A^{-1}\mu^{-1}}{A^{-1}} \\
\frac{1}{\lambda} \leq &\ 1+r^* &\leq \frac{1+n}{\mu},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

dove quest'ultima definizione è ottenuta ricorrendo alle definizioni delle γ_i date precedentemente.

Questi risultati sono chiaramente un'estensione di quelli ottenuti nel caso di altruismo unilaterale. Anche in questo caso vediamo che il tasso di interesse $r^* = f'(k^*)$ non deve essere troppo elevato, in caso contrario si verificherebbero lasciti ereditari ed una ulteriore accumulazione di capitale, fino al ristabilimento dell'eguaglianza. D'altro canto la (2.41) stabilisce che ora il tasso di interesse non deve essere neanche troppo basso, altrimenti si verificherebbero donazioni dai giovani ai vecchi, fino al riequilibrio. Se il tasso di interesse soddisfa la (2.41) nell'economia non si osservano ne' lasciti ereditari, ne' trasferimenti dai giovani ai vecchi. È interessante notare che nell'intervallo di valori previsto da questa relazione è compreso quello stabilito dalla golden rule $r^* = n$. Pertanto, l'esplicita considerazione dell'altruismo bilaterale non assicura che nei modelli con generazioni sovrapposte l'equilibrio sia Pareto ottimale.

2.2 Il sistema della sicurezza sociale e l'accumulazione di capitale

In questo caso gli individui versano un contributo alla sicurezza sociale quando sono giovani, per riceverne in cambio un pagamento quando divengono vecchi. Indichiamo con d_t il contributo versato da un soggetto giovane al tempo t e con b_t il pagamento ricevuto da una persona anziana sempre al tempo t.

Esistono due criteri per gestire un sistema di sicurezza sociale:

1. il criterio della *capitalizzazione*: i contributi dei giovani al tempo t vengono investiti per essere poi restitutiti al tempo $t+1$ con gli interessi, quando quegli stessi giovani sono ormai divenuti vecchi; in questo caso $b_{t+1} = (1 + r_{t+1})d_t$;

2. il criterio di *ripartizione* (pay-as-you-go); in tal caso il sistema trasferisce direttamente alla generazione che è vecchia al tempo t i contributi versati nel medesimo periodo dalla generazione giovane: $b_t = (1 + n)d_t$.

Come si è visto nei paragrafi precedenti, in assenza di altruismo, l'equilibrio di una economia decentralizzata è descritto dalle equazioni (2.1), (2.3), (1.31) e (1.32). Con l'introduzione del sistema di sicurezza sociale a capitalizzazione, le (2.1) e (2.3) diventano:

$$u'[w_t - (s_t + d_t)] = (1+\theta)^{-1}u'[(1 + r_{t+1})(s_t + d_t)] \tag{2.42}$$

$$s_t + d_t = (1 + n)k_{t+1}. \tag{2.43}$$

Si vede subito che se k_t è soluzione del problema caratterizzato dalle (2.1), (2.3) lo è anche del secondo, caratterizzato dalle (2.42) e (2.43). Questo però a patto che d_t sia minore del valore $(1+n)k_{t+1}$ anteriore all'introduzione del sistema di sicurezza sociale (nel qual caso $s_t < 0$), ossia che i contributi non eccedano l'ammontare di risparmio che si sarebbe generato in loro assenza nell'economia. Se tale condizione è verificata, possiamo formulare il seguente, importante risultato: *un sistema a capitalizzazione non esercita alcun effetto sul risparmio complessivo e sull'accumulazione di capitale.*

Il problema si pone in maniera piuttosto diversa quando il sistema non è a capitalizzazione. Il tal caso le (2.1) e (2.3) diventano:

$$\begin{aligned} u'(w_t - s_t - d_t) &= (1+\theta)^{-1}u'[(1+r_{t+1})s_t + (1+n)d_{t+1}] && (2.44)\\ s_t &= (1+n)k_{t+1}. && (2.45) \end{aligned}$$

Dal punto di vista di ciascun individuo, il tasso di rendimento del risparmio destinato alla sicurezza sociale è ora n, non r. Il governo può pagare un tasso di rendimento n dato che in ogni periodo aumenta il numero delle persone in vita che pagano contributi. Dato che in un sistema a ripartizione la sicurezza sociale non è altro che uno schema di trasferimenti, senza alcuna forma di risparmio, l'unica fonte per l'accumulazione di capitale nell'economia è, in base alla (2.45), il risparmio privato s_t.

Vediamo ora quali sono gli effetti della sicurezza sociale sul rispermio privato, dati i salari ed i tassi di interesse. Derivando la (2.44) ed assumendo che $d_t = d_{t+1}$, si ricava:

$$\begin{aligned} u_1''\left(-\frac{\partial s_t}{\partial d_t} - 1\right) &= (1+\theta)^{-1}u_2''\left[(1+r_{t+1})\frac{\partial s_t}{\partial d_t} + (1+n)\right]\\ \frac{\partial s_t}{\partial d_t}(-u_1'' - (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u_2'') &= u_1'' + (1+\theta)^{-1}(1+n)u_2'', \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{\partial s_t}{\partial d_t} = -\frac{u_1'' + (1+\theta)^{-1}(1+n)u_2''}{u_1'' + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u_2''} < 0, \qquad (2.46)$$

dove u_1'' e u_2'' indicano le derivate di u' rispetto alle grandezze $w_t - s_t - d_t$ e $(1+r_{t+1})s_t + (1+n)d_t$. Otteniamo così che $|\partial s_t/\partial d_t| \gtrless 1$ a seconda che $n \gtrless r$. Abbiamo utilizzato esplicitamente la notazione di derivata parziale per indicare che salario e tasso di interesse vengono mantenuti costanti.

I contributi alla sicurezza sociale comportano una riduzione del risparmio privato. Che questa diminuzione sia nella medesima misura dei contributi, oppure sia maggiore o minore, dipende dalla relazione tra tasso di interesse e tasso di crescita della popolazione.

Questo tuttavia è solo l'effetto di equilibrio parziale. La diminuzione del risparmio, e quindi dello stock di capitale, comporta una diminuzione dei salari ($w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$) ed un incremento del tasso di interesse ($r_t = f'(k_t)$). La prima agisce nel senso di un ulteriore compressione del risparmio, il secondo ha, come si è visto, effetti ambigui.

Vediamo ora di valutare, in un contesto di equilibrio generale, quali sono gli effetti di un incremento nei contributi al sistema di sicurezza sociale sullo stock di capitale.

Fig. 2.2. Gli effetti dell'introduzione di un sistema di sicurezza sociale.

La (2.45) può essere scritta nella forma:

$$(1+n)k_{t+1} = s\left[w_t(k_t), r_{t+1}(k_{t+1}), d_t\right], \tag{2.47}$$

la quale chiaramente stabilisce una relazione fra k_{t+1} e k_t. Assumendo che lo steady state sia unico e stabile e che la dinamica sia di tipo non oscillatorio, cioè assumendo che:

$$0 < \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1,$$

la relazione fra k_{t+1} e k_t è del tipo indicato in Fig. 2.2.

Per sapere come si modifica il luogo geometrico del risparmio della Fig. 2.2 quando d_t passa da zero ad un valore positivo, dobbiamo derivare la (2.47) mantenendo k_t costante:

$$(1+n)\cdot\frac{\mathrm{d}k_{t+1}}{\mathrm{d}d_t} = \frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}r_{t+1}}{\mathrm{d}k_{t+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}k_{t+1}}{\mathrm{d}d_t}+\frac{\partial s_t}{\partial d_t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k_{t+1}}{\mathrm{d}d_t}\left(1+n-\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}r_{t+1}}{\mathrm{d}k_{t+1}}\right) &= \frac{\partial s_t}{\partial d_t}\\
\frac{\mathrm{d}k_{t+1}}{\mathrm{d}d_t} &= \frac{\partial s_t/\partial d_t}{1+n-s_r f''(\cdot)},
\end{aligned}$$

dove $s_r = \partial s_t/\partial r_{t+1}$ e $f''(\cdot) = dr_{t+1}/dk_{t+1}$. Il numeratore è, per la (2.46), negativo. Il denominatore, in virtù della (2.6) e dell'ipotesi di stabilità qui fatta, è positivo. Quindi $\mathrm{d}k_{t+1}/\mathrm{d}d_t < 0$: un incremento dei contributi comporta una traslazione verso il basso del luogo geometrico del risparmio, da s ad s'.

L'impatto della sicurezza sociale sull'aggiustamento dinamico dell'economia è sia quello di rallentare l'accumulazione di capitale, sia quello di ridurre lo stock di capitale di steady state. Supponiamo che nel periodo z, in cui nel sistema è presente uno stock di capitale k_z, venga introdotto un sistema del tipo a ripartizione. L'economia, che si stava avviando verso un equilibrio di steady state caratterizzato da uno stock di capitale k^*, si muove ora verso un equilibrio con stock di capitale $\hat{k}$. Lo stock di capitale di steady state diminuisce, e con esso lo stock di capitale di ciascun periodo futuro, rispetto al livello che sarebbe stato altrimenti raggiunto.

Tralasciando gli altri motivi che possono giustificare il ricorso ad un sistema di sicurezza sociale, dobbiamo considerare questo risultato come un esito auspicabile? Se ci basiamo su un criterio di ottimalità di tipo paretiano, la risposta alla domanda precedente dipende dal fatto che, anteriormente all'introduzione del sistema, il tasso di interesse r fosse maggiore o minore di n. Se r era minore di n, l'introduzione della sicurezza sociale, riducendo, se non eliminando, l'inefficienza dinamica dell'economia, ha certamente riflessi positivi in termini di benessere. Se, al contrario, prima dell'introduzione del sistema r era maggiore di n, lo schema agisce a favore della prima vecchia generazione: essa riceve un trasferimento positivo pari a d_t a spese della generazione successiva. In questo caso non siamo di fronte ad un miglioramento nel senso di Pareto.

2.3 Un modello di perenne giovinezza

I modelli con generazioni sovrapposte in cui siano contemporaneamente presenti più di due generazioni tendono a divenire analiticamente intrattabili. In questo paragrafo intendiamo introdurre una versione analiticamente trattabile in tempo continuo del modello con generazioni sovrapposte ed utilizzeremo lo schema così costruito per analizzare gli effetti della politica fiscale e le ripercussioni sul risparmio di variazioni del tasso di interesse.

Partiamo con l'ipotizzare che ogni individuo, invece di vivere indefinitamente, fronteggi in ogni istante una data probabilità di morire. Chiamiamo X la variabile casuale 'tempo di vita che rimane' e stabiliamo che essa presenti una distribuzione esponenziale. La sua funzione di densità

[3] è cioè data da:

$$f(x) = p\,\mathrm{e}^{-px}. \tag{2.48}$$

Il suo valore atteso è :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty xp\,\mathrm{e}^{-px}dx \\ &= [-x\,\mathrm{e}^{-px}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px}dx \\ &= 0 + [-\frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-px}]_0^\infty = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Questo mostra che il tempo di vita medio di ogni individuo è inversamente proporzionale alla costante p. Al diminuire di p l'orizzonte temporale degli individui si allunga. Al limite, se p tende a zero, l'orizzonte temporale diviene infinitamente lungo e ritorniamo nel mondo descritto dal modello di Ramsey. Seguendo [4], chiamiamo $p \in [0, \infty]$ 'probabilità istantanea di morte', o 'probabilità di morte nell'unità di tempo'. Questa denominazione è giustificata dal fatto che, secondo la (2.48), la probabilità che il tempo che rimane da vivere sia compreso fra 0 e dt, cioè che la morte avvenga nel periodo $[0, dt]$, è data da $f(0)dt = pdt$.

Va inoltre ricordato che la probabilità che un individuo sia in vita al tempo t è pari alla probabilità che il tempo che gli rimane da vivere sia maggiore di t, e quindi:

$$\begin{aligned} P(X \geq t) &= \int_t^\infty f(x)dx = \int_t^\infty p\,\mathrm{e}^{-px}dx \\ &= \left[-\,\mathrm{e}^{-px}\right]_t^\infty = \mathrm{e}^{-pt}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

In ogni istante di tempo nasce una nuova generazione, o coorte, composta da individui caratterizzati dalla medesima probabilità di morte p. Per questioni di convenienza poniamo la numerosità di ogni nuova coorte esattamente pari a p. In base alla (2.49), una coorte nata al tempo s presenta pertanto al tempo $t \geq s$, una numerosità pari a:

$$pP(X \geq t - s) = p\,\mathrm{e}^{-p(t-s)}.$$

La dimensione complessiva della popolazione in un qualsiasi istante t è allora:

$$\int_{-\infty}^t p\,\mathrm{e}^{-p(t-s)}ds = [-\,\mathrm{e}^{-p(t-s)}]_{-\infty}^t = 1.$$

Assumiamo che gli individui massimizzino l'utilità totale attesa nell'arco della propria vita, senza alcun interesse per i propri eredi o per i propri genitori. In assenza di forme di assicurazione, e in virtù dell'incertezza sulla data di morte, gli individui possono morire lasciando un'involontaria

[3] Si tratta di una funzione di densità in quanto:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty p\,\mathrm{e}^{-px}dx = [-\,\mathrm{e}^{-px}]_0^\infty = 1.$$

eredità positiva o un'involontaria eredità negativa, a seconda che al momento della morte la loro ricchezza sia positiva oppure vi siano debiti pendenti.

L'ipotesi che esista incertezza solo a livello individuale, e non a livello aggregato, apre peraltro un ampio spazio a forme di assicurazione. Supponiamo che vi siano compagnie di assicurazione che offrono assicurazioni sulla vita, sia in senso positivo che negativo. Un individuo rappresentativo che nel nostro modello abbia accumulato ricchezza ha di fronte la possibilità di morire prima di aver potuto utilizzare tale ricchezza. Egli trarrebbe perciò un vantaggio dal fatto di poter vendere il diritto a godere della propria ricchezza, da esercitarsi dopo la sua morte, in cambio di una disponibilità immediata di risorse nel corso della propria vita effettiva. Esiste cioè una domanda di contratti di assicurazione che assumano la forma seguente: la compagnia versa un premio ai vivi, in cambio del loro patrimonio alla data della morte. È un meccanismo esattamente contrario rispetto a quello previsto dai normali contratti di assicurazione; in questi ultimi è l'assicurato ad effettuare in vita versamenti alla compagnia di assicurazione, in cambio di un pagamento da effetturasi ai propri eredi in caso di morte.

Ipotizzando libera entrata e profitti nulli nel mercato delle assicurazioni, il premio assicurativo deve essere esattamente uguale a p per unità di tempo: gli individui pagano (ricevono) p, per ottenere (versare) un'unità del bene in caso di morte. Se non esiste un movente a lasciare eredità positive, e se è proibito lasciare eredità negative, gli individui hanno convenienza a stipulare con le compagnie di assicurazione contratti che prevedono il trasferimento alle compagnie medesime di tutta la loro ricchezza v_t in caso di morte. In cambio le compagnie versano loro un premio pari a pv_t per unità di tempo.

La tipica compagnia assicurativa pareggia esattamente il proprio bilancio: riceve trasferimenti ad un tasso pv_t da coloro che muoiono e paga premi ai vivi al medesimo tasso pv_t. Essa non affronta alcuna incertezza dato che la proporzione di coloro che muoiono per unità di tempo p non è una variabile stocastica, per ipotesi.

Il consumo individuale. Indichiamo con c_t^s, y_t^s, h_t^s, v_t^s il livello al tempo t del consumo, del reddito da lavoro, del capitale umano e della ricchezza al netto del capitale umano, di un individuo nato al tempo s. Gli individui nati al tempo s appartengono alla generazione s. Dato che, in questa fase iniziale, ci concentriamo sul consumo individuale, omettiamo l'indice s fino al momento di discutere l'aggregazione fra individui appartenenti a generazioni diverse.

Gli individui devono qui risolvere un problema di ottimizzazione dell'utilità in un contesto di incertezza. Al tempo t essi massimizzano:

$$E\left[\int_t^{\infty} u(c_z)\,\mathrm{e}^{-\theta(z-t)}dz|t\right]. \tag{2.50}$$

L'incertezza sul consumo di ogni data futura, e quindi la necessità di considerare nella (2.50) le aspettative formulate al tempo t, deriva dalla possibilità che l'individuo muoia. In caso di morte l'utilità è per ipotesi nulla, se al tempo z l'individuo è vivo trae invece un'utilità data da $u(c(z))$. Assumiamo che $u(\cdot) = \log(\cdot)$. L'ipotesi che l'utilità sia logaritmica, se è conveniente dal punto di vista analitico, deve essere considerata restrittiva in quanto impone un'elasticità di sostituzione $\sigma = -u'(c)/(cu''(c))$ tra il consumo in diversi periodi pari ad uno. Assumiamo infine che non vi siano altre fonti di incertezza nell'economia, così che le aspettative di y_z, v_z e h_z, $z \geq t$ siano soggettivamente certe. Si dimostra che la funzione obiettivo può essere riformulata nel seguente modo:

$$\int_t^{\infty} \log(c_z)\, \mathrm{e}^{-(\theta+p)(z-t)} dz. \tag{2.51}$$

L'ipotesi che la probabilità di morte sia esponenziale ha semplicemente l'effetto di incrementare il tasso di preferenza temporale degli individui.

Se al tempo t il consumatore è dotato di una ricchezza non comprensiva del capitale umano pari a v_z, egli percepisce interessi in misura pari a $r_z v_z$ (dove r_z è il tasso di interesse) più il premio della compagnia di assicurazione pv_z. Il vincolo di bilancio dinamico dell'individuo quando è vivo può pertanto essere espresso da:

$$\dot{v}_z = (r_z + p)v_z + y_z - c_z. \tag{2.52}$$

È naturalmente necessaria la consueta condizione NPG per impedire che gli individui si indebitino indefinitamente, proteggendosi con l'acquisto di assicurazioni sulla vita. Imporremo a questo proposito una condizione che non è altro che un'estensione di quella applicata nel caso deterministico. Se al tempo z l'individuo è ancora vivo, allora:

$$\lim_{z\to\infty} v_z\, \mathrm{e}^{-\int_t^z (r_\tau+p)d\tau} = 0. \tag{2.53}$$

Un individuo non può accumulare debiti per sempre ad un tasso superiore al tasso di interesse per lui rilevante. Quest'ultimo è dato dal tasso di interesse sui debiti più il premio di assicurazione che occorre pagare in caso di indebitamento.

Dal punto di vista della notazione è conveniente definire il fattore di sconto:

$$R_{t,z} \equiv \mathrm{e}^{-\int_t^z (r_\tau+p)d\tau}. \tag{2.54}$$

Integrando la (2.52) e servendoci della (2.53), otteniamo:

$$\begin{aligned} v_z &= \mathrm{e}^{\int_t^z (r_\tau+p)d\tau}\left[v_t + \int_t^z (y_s - c_s)\, \mathrm{e}^{-\int_t^s (r_\tau+p)d\tau} ds\right] \\ v_z\, \mathrm{e}^{\int_t^z (r_\tau+p)d\tau} &= v_t + \int_t^z (y_s - c_s)\, \mathrm{e}^{-\int_t^s (r_\tau+p)d\tau} ds \\ \lim_{z\to\infty} v_z\, \mathrm{e}^{\int_t^z (r_\tau+p)d\tau} &= v_t + \int_t^\infty (y_s - c_s) R_{t,s} ds = 0. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$v_t + h_t = \int_t^\infty c_s R_{t,s} ds, \tag{2.55}$$

dove $h_t = \int_t^\infty y_s R_{t,s} ds$.

L'individuo massimizza l'utilità attesa (2.51) sotto il vincolo di bilancio (2.55) o, equivalentemente, sotto il vincolo dell'equazione di accumulazione (2.52) e della condizione NPG (2.53). Un confronto fra questo problema ed il problema di ottimizzazione affrontato da individui dalla vita infinita rivela che la presenza di una probabilità positiva di morte influenza sia il tasso al quale viene scontata l'utilità futura ($\theta + p$ invece di θ), sia il tasso di interesse effettivamente fronteggiato dagli individui ($r + p$ invece di r).

Tenendo presente che $\sigma(c) = 1$, $\forall c$, e servendoci ancora una volta del principio del massimo, otteniamo una condizione del primo ordine analoga alla (1.19):

$$\dot{c}_z = c_z[r_z + p - (\theta + p)] = (r_z - \theta)c_z. \tag{2.56}$$

Il consumo individuale aumenta se il tasso di interesse è maggiore del tasso di sconto soggettivo, e viceversa.

Integriamo la (2.56) per esprimere c_z in funzione di c_t:

$$c_z = c_t\, \mathrm{e}^{\int_t^z (r_\tau - \theta) d\tau},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty c_z R_{t,z} dz &= c_t \int_t^\infty \mathrm{e}^{\int_t^z (r_\tau - \theta) d\tau}\, \mathrm{e}^{-\int_t^z (r_\tau + p) d\tau} dz \\ &= c_t \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^z (\theta + p) d\tau} = c_t \int_t^\infty \mathrm{e}^{-(\theta+p)(z-t)} dz \\ &= -\frac{1}{\theta + p} \cdot c_t \cdot [\,\mathrm{e}^{-(\theta+p)(z-t)}]_t^\infty = \frac{1}{\theta + p} \cdot c_t. \end{aligned}$$

Sostituendo ora nel vincolo di bilancio (2.55) si ricava:

$$c_t = (\theta + p)(v_t + h_t). \tag{2.57}$$

Il consumo individuale dipende dalla ricchezza individuale complessiva, con una propensione al consumo pari a $\theta + p$, che è indipendente dal tasso di interesse, in virtù dell'ipotesi di utilità logaritmica, ed è indipendente dall'età del consumatore, in virtù dell'ipotesi di probabilità di morte costante. Il fattore impiegato per scontare il reddito da lavoro è $r + p$, il medesimo al quale viene accumulata la ricchezza non comprensiva del capitale umano.

Consumo aggregato. Dopo aver analizzato il consumo di una generazione, si tratta ora di sommare il consumo delle varie generazioni per derivare il consumo aggregato. Indichiamo rispettivamente con C_t, Y_t, H_t e V_t il livello aggregato del consumo, del reddito da lavoro, del capitale umano e della ricchezza al netto del capitale umano. Questi valori aggregati si ottengono integrando rispetto alle varie generazioni (dobbiamo ora reintrodurre il doppio indice c_t^s, y_t^s, ecc...) e ricordando che la dimensione di una generazione nata $t - s$ periodi addietro è data da $p\,\mathrm{e}^{-p(t-s)}$. Il consumo aggregato è pertanto dato da:

$$C_t = \int_{-\infty}^t c_t^s p\, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds.$$

Analoghe definizioni si applicano al reddito aggregato, al capitale umano aggregato ed alla ricchezza aggregata al netto del capitale umano. Sulla base della (2.57), delle definizioni di H_t e V_t, e del fatto che la propensione al consumo è indipendente dall'età, possiamo facilmente ricavare la seguente espressione per il consumo aggregato:

$$C_t = (\theta + p)(H_t + V_t). \tag{2.58}$$

Il passo successivo consiste nel derivare il comportamento dinamico di H_t e W_t. Per quanto concerne H_t, il capitale umano, dobbiamo specificare la distribuzione del reddito da lavoro fra i vari individui in un dato istante del tempo. Per incorporare nel modello l'idea di un periodo di pensionamento, possiamo esprimere nel modo seguente il declino, con il trascorrere dell'età, dei redditi da lavoro:

$$y_t^s = aY_t e^{-\alpha(t-s)}, \qquad \alpha \geq 0. \tag{2.59}$$

L'equazione (2.59) implica che il reddito da lavoro pro capite di una data generazione è tanto più piccolo tanto più anziana è la generazione, tranne che per $\alpha = 0$, caso in cui il reddito da lavoro pro capite è indipendente dall'età. data questa formulazione, se il reddito da lavoro aggregato è costante, il reddito da lavoro del singolo individuo diminuisce in modo esponenziale con il trascorrere del tempo. Per determinare il valore di a, operiamo come segue:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \int_{-\infty}^{t} y_t^s p\, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} paY_t\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds \\
&= apY_t \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(\alpha+p)(t-s)} ds \\
&= \frac{apY_t}{\alpha+p} \left[\mathrm{e}^{-(\alpha+p)(t-s)} \right]_{-\infty}^{t} = \frac{apY_t}{\alpha+p}.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$a = \frac{\alpha+p}{p}. \tag{2.60}$$

Per ricavare H_t scriviamo invece:

$$\begin{aligned}
h_t^s &= \int_t^{\infty} y_z^s R_{t,z} dz = \int_t^{\infty} aY_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-s)} R_{t,z} dz \\
&= a\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \int_t^{\infty} Y_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-t)} R_{t,z} dz,
\end{aligned}$$

dove l'integrale posto sul lato destro dell'espressione è indipendente dalla data di nascita s. Il valore complessivo del capitale umano è dato da:

$$\begin{aligned}
H_t &= \int_{-\infty}^{t} h_t^s p\, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds \\
&= ap \int_t^{\infty} Y_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-t)} R_{t,z} dz \cdot \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-p(t-s)}\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} ds \\
&= (\alpha+p) \int_t^{\infty} Y_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-t)} R_{t,z} dz \cdot \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(\alpha+p)(t-s)} ds \\
&= \int_t^{\infty} Y_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-t)} R_{t,z} dz \cdot [\mathrm{e}^{-(\alpha+p)(t-s)}]_{-\infty}^{t} \\
&= \int_t^{\infty} Y_z\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-t)}\, \mathrm{e}^{-\int_t^z (r_\tau+p) d\tau} dz.
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$H_t = \int_t^\infty Y_z \, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} dz. \tag{2.61}$$

Il valore complessivo del capitale umano è uguale al valore attuale del reddito da lavoro che sarà percepito in futuro da coloro che sono vivi nel periodo corrente, con un tasso di sconto pari ad r. Ciò equivale a dire che esso è uguale al valore attuale di tutti i futuri redditi da lavoro, scontati al tasso $r + p + \alpha$.

Una caratterizzazione alternativa dell'andamento di H_t è quella che si ottiene derivando la (2.61) rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_t &= \int_t^\infty Y_z \, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} (\alpha + r_\tau + p) dz - Y_t \\
&= (\alpha + r_\tau + p) \int_t^\infty Y_z \, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} dz - Y_t \\
&= (\alpha + r_\tau + p) H_t - Y_t.
\end{aligned}$$

Integrando ora questa equazione differenziale di primo ordine otteniamo:

$$\begin{aligned}
H_z &= \mathrm{e}^{\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} [H_t - \int_t^z Y_s \, \mathrm{e}^{-\int_t^s (\alpha + r_\tau + p) d\tau} ds] \\
\lim_{z \to \infty} H_z \, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} &= H_t - \int_t^\infty Y_s \, \mathrm{e}^{-\int_t^s (\alpha + r_\tau + p) d\tau} ds = H_t - H_t = 0.
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\dot{H}_t = (\alpha + r_\tau + p) H_t - Y_t \tag{2.62}$$

$$\lim_{z \to \infty} H_z \, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha + r_\tau + p) d\tau} = 0. \tag{2.63}$$

L'equazione (2.61) e le (2.62), (2.63) sono equivalenti.

Veniamo infine alla ricchezza non comprensiva del capitale umano V_t:

$$V_t = \int_{-\infty}^t v_t^s p \, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds.$$

Derivando V_t rispetto al tempo si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_t &= \int_{-\infty}^t \frac{d v_t^s p \, \mathrm{e}^{-p(t-s)}}{dt} ds + p v_t^t \\
&= \int_{-\infty}^t \left[\frac{d v_t^s}{dt} p \, \mathrm{e}^{-p(t-s)} - v_t^s p^2 \, \mathrm{e}^{-p(t-s)} \right] ds + p v_t^t \\
&= p v_t^t - p V_t + \int_{-\infty}^t \frac{d v_t^s}{dt} p \, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds. \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

Il primo termine è la ricchezza (non comprensiva del capitale umano) di una coorte di nuovi nati, ed è chiaramente pari a zero. Il secondo rappresenta la ricchezza di coloro che muoiono in

t, ed il terzo la variazione delle ricchezze di tutti gli altri. Sostituendo la (2.52) nella (2.64) e ricordando che $v_t^t = 0$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= -pV_t + \int_{-\infty}^{t} [(r_t^s + p)v_t^s + y_t^s - c_t^s]\, p\, \mathrm{e}^{-p(t-s)} ds \\ &= r_t V_t + Y_t + C_t. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Va notato che, sebbene dal punto di vista del singolo individuo la ricchezza non comprensiva del capitale umano venga accumulata al tasso $r + p$, a livello aggregato essa cresce al tasso r. Questo perchè l'ammontare pV è un trasferimento, effettuato tramite le compagnie assicurative da chi muore a chi resta vivo. Non si tratta di un'addizione netta alla ricchezza aggregata. Il fatto che vi sia una differenza fra rendimento individuale della ricchezza e quello sociale risulterà di importanza cruciale per alcuni dei successivi risultati.

Il comportamento aggregato del sistema. Consideriamo ora congiuntamente le varie equazioni ottenute. Tralasciando l'indice t laddove non necessario, possiamo descrivere il comportamento aggregato dell'economia nel modo seguente:

$$\begin{aligned} C &= (p + \theta)(H + V) \\ \dot{V} &= rV + Y - C \\ \dot{H} &= (r + p + \alpha)H - Y \\ \lim_{z \to \infty} H_z e^{-\int_t^z (r_\tau + p + \alpha) d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

L'aver ottenuto a livello aggregato equazioni così semplici è il premio per la complessa procedura di aggregazione seguíta, procedura che, tra l'altro, assicura che i comportamenti aggregati poggino su esplicite e solide microfondazioni.

Va ancora notato come, sia la propensione al consumo $(\theta + p)$, sia il fattore di sconto impiegato per definire il valore del capitale umano $(r + p + \alpha)$, siano funzioni crescenti della probabilità di morte: tanto più ravvicinato è l'orizzonte degli individui, tanto maggiori sono la propensione al consumo ed il tasso cui vengono scontati i redditi da lavoro futuri.

Un'altra possibile caratterizzazione dell'andamento del consumo aggregato la si ottiene derivando la (2.58) e sostituendo le (2.65), (2.62):

$$\begin{aligned} \dot{C} &= (\theta + p)(\dot{H} + \dot{V}) \\ &= (\theta + p)[(r + p + \alpha)H - Y + rV + Y - C] \\ &= (\theta + p)[(r + p + \alpha)H + rV - (\theta + p)(H + V)] \\ &= (\theta + p)(r + \alpha - \theta)(H + V) - (\theta + p)(\alpha + p)V \\ &= (r + p - \theta)C - (\theta + p)(\alpha + p)V. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Avendo ipotizzato che la popolazione non cresca nel tempo ($n = 0$), nel caso di orizzonte infinito ($p = 0$), α deve logicamente assumere valore zero in quanto, se non muore nessuno, la popolazione non varia e ciascun individuo deve ricevere in ogni periodo la medesima quota del reddito. In questo caso $\dot{C} = (r - \theta)C$, cioè il tasso di variazione del consumo è funzione della differenza fra r e θ.

Siamo ora in grado di definire l'equilibrio generale di questa economia. Assumeremo, per iniziare, che il reddito da lavoro di ciascun individuo sia una frazione costante del reddito aggregato, ossia che $\alpha = 0$. Indi studieremo che cosa avviene quando si sostituisce questa ipotesi con quella di redditi decrescenti, cioè con l'ipotesi $\alpha > 0$.

2.3.1 Dinamica ed equilibri di steady state con $\alpha = 0$

Per completare il modello e definire il sentiero di accumulazione del capitale, dobbiamo specificare la tecnologia che determina il livello di produzione, il reddito da lavoro e i tassi di interesse. Esprimiamo la funzione di produzione netta come:

$$F(K) \equiv \mathbf{F}(K, 1) - \delta K,$$

dove $\mathbf{F}(\cdot)$ è caratterizzata da rendimenti di scala costanti e δ è il tasso di deprezzamento del capitale. Notiamo che F' può assumere sia segno positivo che segno negativo. L'unica forma di ricchezza, se si tralascia il capitale umano, è costituita dal capitale, quindi $V = K$. Il tasso di interesse coincide quindi con il prodotto marginale del capitale $r = F'(K)$.

Servendoci delle equazioni (2.65) e (2.66) e ponendo $\alpha = 0$, otteniamo:

$$\dot{C} = [F'(K) - \theta]C - p(\theta + p)K \tag{2.67}$$

$$\dot{K} = F(K) - C. \tag{2.68}$$

Il luogo geometrico $dK/dt = 0$ ricalca la funzione di produzione: $F(K) = C$. Possiamo individuare tre diversi livelli dello stock di capitale:

1. K_{GR} che è individuato dalla condizione $F'(K_{GR}) = 0$; dato che il modello non prevede crescita della popolazione, K_{GR} è il livello dello stock di capitale previsto dalla golden rule, quello cioè per cui risulta massimo il consumo pro capite di steady state;
2. $K_{\max}$, individuato dalla condizione $F(K_{\max}) = \theta$;
3. $K_{\min}$, individuato dalla condizione $F(K_{\min}) = \theta + p$.

Si noti che $K_{\min} < K_{\max} < K_{GR}$. Il luogo geometrico $dC/dt = 0$ è, per valori positivi di $K \in [0, K_{\max})$, inclinato positivamente e convesso. Infatti, tenendo conto che $F'(K) - \theta > 0$ e $KF''(K) < 0$ per ogni $K \in [0, K_{\max})$:

$$C = \frac{p(p+\theta)K}{F'(K) - \theta} > 0$$

$$\frac{dC}{dK} = p(p+\theta) \cdot \frac{F'(K) - \theta - KF''(K)}{(F'(K) - \theta)^2} > 0.$$

Esso parte dall'origine e raggiunge $K_{\max}$ asintoticamente. I due luoghi geometrici sono presentati nella Fig. 2.3.

Fig. 2.3. L'aggiustamento dinamico quando la durata della vita è incerta.

I punti fissi del modello sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned}[F'(K)-\theta]C-p(\theta+p)K &= 0\\ F(K)-C &= 0,\end{aligned}$$

cioè i punti $(\tilde{K},\tilde{C})=(0,0)$ e (K^*,C^*), quest'ultimo indicato in Fig. 2.3, con E. Dalla (2.67) si osserva che:

$$F'(K^*)-\theta=\frac{p(\theta+p)K^*}{C^*}>0,$$

e quindi $F'(K^*)>\theta$.

Supponiamo poi che $F'(K^*)>\theta+p$, cioè che:

$$F'(K^*)=\theta+p(1+\varepsilon),\qquad \varepsilon>0.$$

Sempre in base alla (2.67), possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(F'(K)-\theta)C^* &= p(\theta+p)K^*\\ (\theta+p(1+\varepsilon)-\theta)C^* &= p(\theta+p)K^*\\ (1+\varepsilon)C^* &= (\theta+p)K^*.\end{aligned}$$

Ossia, servendoci della (2.68):

$$\begin{aligned}F(K^*) &= C^*\\ (1+\varepsilon)F(K^*) &= (1+\varepsilon)C^* = (\theta+p)K^*\\ (1+\varepsilon)F(K^*) &= (F'(K^*)-p\varepsilon)K^*.\end{aligned}$$

Questo implicherebbe che $F(K^*) < (F'(K^*)-p\varepsilon)K^* < F'(K^*)K^*$, ma ciò è impossibile in quanto $F(\cdot)$ è concava e quindi $F(K^*) > F'(K^*)K^*$. Concludiamo quindi che deve essere $F'(K^*) < \theta+p$. Riassumendo:

$$\theta < F(K^*) < \theta + p. \tag{2.69}$$

Lo Jacobiano del nostro modello vale:

$$J(K,C) = \begin{bmatrix} F'(K)-\theta & F''(K)C-p(\theta+p)\\ -1 & F'(K)\end{bmatrix},$$

e i suoi autovalori valgono:

$$\lambda_1 = F'(K) - \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{(2p+\theta)^2-4CF''(K)}}{2} \qquad \lambda_2 = F'(K) - \frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{(2p+\theta)^2-4CF''(K)}}{2}.$$

Si dimostra che nel punto (K^*,C^*), in virtù della (2.69) e del fatto che $-4CF''(K) > 0$ per ogni K, è:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &> F'(K) - \frac{\theta}{2} + \frac{2p+\theta}{2} = F'(K)+p > \theta+p > 0\\ \lambda_2 &< F'(K) - \frac{\theta}{2} - \frac{2p+\theta}{2} = F'(K)-p-\theta < 0\end{aligned}$$

Il punto (K^*,C^*) è pertanto punto di sella. Il punto $(0,0)$ è invece caratterizzato da due autovalori strettamente positivi, essendo $F'(0)$ positivo e molto grande per ipotesi. Con un argomentazione analoga a quella del capitolo precedente si può dimostrare che esiste un'unica traiettoria di sella SS convergente a (K^*,C^*) e che qualsiasi altra traiettoria conduce in un tempo finito a livelli negativi di C o di K, violando a quel punto la (2.67) o la (2.68). Dato lo stock di capitale iniziale, C è pertanto univocamente determinato dal requisito che l'economia si collochi sul sentiero di sella.

Da ultimo va osservato che K^* è una funzione decrescente di p: un aumento di p porta ad una traslazione del luogo geometrico $dC/dt = 0$ verso sinistra, con una conseguente diminuzione di K^*.

In questa formulazione del modello con $\alpha = 0$ abbiamo ottenuto due interessanti risultati:

1. se gli individui hanno orizzonte finito ($p > 0$), il tasso di interesse $r = F'(K^*)$ risulta maggiore del tasso di sconto soggettivo θ; l'equilibrio è dinamicamente efficiente ($r > n = 0$);
2. tanto più ravvicinato è l'orizzonte temporale degli individui, tanto maggiore è il tasso di interesse e tanto minore è lo stock di capitale.

Per comprendere questi risultati ci domandiamo che cosa accadrebbe se r fosse uguale a θ. In questo caso, come si è visto nel precendente capitolo, individui con un orizzonte infinito sceglierebbero in steady state un profilo del consumo costante ($\dot{c} = 0$), associato ad un livello dello stock di capitale che assicuri l'uguaglianza fra prodotto marginale del capitale e θ. La situazione è molto diversa quando gli individui hanno orizzonte finito. Se r fosse uguale a θ, gli individui che nascono senza ricchezza tranne che il proprio capitale umano, sceglierebbero un profilo del consumo costante. Dato che in steady state il profilo del reddito da lavoro nell'arco della vita di un individuo è anch'esso costante (per ipotesi), il profilo del consumo coinciderebbe con quello del reddito da lavoro: nessuno ripsarmierebbe o attingerebbe ai propri risparmi. Il risultato sarebbe, per il complesso dell'economia, una completa assenza di accumulazione di capitale, e questo non potrebbe essere un equilibrio.

Ciò che serve affinché si costituisca un livello positivo dello stock aggregato di capitale è che gli individui risparmino, almeno all'inizio della propria vita: il consumo deve essere inizialmente basso e poi aumentare. È facile mostrare che se r è maggiore di θ la ricchezza individuale non comprensiva del capitale umano aumenta nel corso dell'esistenza. In aggregato si assiste così ad un processo di accumulazione di capitale.

Tanto maggiore è p, e quindi tanto più breve è la vita attesa, tanto minore è la ricchezza media dei singoli individui e quindi lo stock di capitale aggregato.

2.3.2 Dinamica ed equilibri di steady state con $\alpha > 0$

Vogliamo dimostrare che, quando $\alpha > 0$, l'equilibrio può diventare dinamicamente inefficiente. Le equazioni dinamiche del modello sono ora:

$$\dot{C} = [F'(K) + \alpha - \theta]C - p(\theta + p)K \tag{2.70}$$
$$\dot{K} = F(K) - C. \tag{2.71}$$

Il luogo geometrico $dK/dt = 0$ è il medesimo della situazione precedente. Definiamo inoltre $K_{\max}$ come quel livello dello stock di capitale per cui $F'(K_{\max}) = \theta - \alpha$. Il luogo geometrico $dC/dt = 0$ è inclinato positivamente per valori positivi di C, passa per l'origine e raggiunge $K_{\max}$ asintoticamente. Il livello di steady state dello stock di capitale è tale che, in steady state, il prodotto marginale del capitale risulta maggiore di $\theta - \alpha$. Dato che $\theta - \alpha$ può essere sia negativo che positivo, K può essere più grande o più piccolo dello stock di capitale richiesto dalla golden rule, K_{GR}. L'equilibrio è rappresentato in Fig. 2.4: si tratta nuovamente di un equilibrio di sella, con un sentiero di sella indicato da SS.

Un aumento di α sposta il luogo geometrico $dC/dt = 0$ verso il basso, con un conseguente aumento dello stock di capitale di steady state. Dato che non esiste alcun limite precostituito al

Fig. 2.4. L'aggiustamento dinamico nel caso $\alpha > 0$.

valore di α, non possiamo escludere che lo stock di capitale ecceda il livello previsto dalla golden rule.

In questo paragrafo abbiamo quindi presentato un modello aggregato con generazioni sovrapposte nel quale tutte le funzioni comportamentali sono state derivate da una procedura di massimizzazione dell'utilità. Abbiamo dimostrato come l'esistenza di un ciclo vitale abbia due effetti di segno opposto sull'accumulazione di capitale:

1. il fatto che le persone non vivano per sempre comporta una minore accumulazione di capitale: tanto più breve è l'orizzonte temporale degli individui, tanto più basso è il livello di steady state dello stock di capitale;

2. d'altra parte, il fatto che le persone smettano di lavorare, o comunque che vi sia al termine dell'esistenza un declino dei redditi da lavoro, induce una maggiore accumulazione di capitale.

L'effetto netto è ambiguo, ma se il secondo fattore ha un peso rilevante, l'economia può rivelarsi dinamicamente inefficiente.

2.4 La politica fiscale: il debito ed il finanziamento dei disavanzi

Nelle pagine che seguono esaminiamo le conseguenze di un finanziamento in deficit sull'accumulazione di capitale e sui tassi di interesse. Presteremo particolare attenzione ad un tema controverso: se un aumento del disavanzo del bilancio del settore pubblico debba comportare o meno un aumento del tasso di interesse reale.

Partiamo con il formulare il vincolo di bilancio del governo. Esso non dipende dal fatto che gli individui abbiano o meno vita finita. Il governo spende nell'acquisto di beni un ammontare G e raccoglie imposte per un ammontare T. Per concentrarci esclusivamente sui problemi del finanziamento della spesa pubblica, assumiamo che G non influenzi l'utilità marginale del consumo privato C; il livello di G non ha pertanto alcun effetto diretto sulla scelta tra consumo e risparmio. Per motivi analoghi ipotizziamo che le imposte siano tutte del tipo lump-sum.

Detto B il livello del debito pubblico, il vincolo di bilancio dinamico del governo è:

$$\dot{B}_t = r_t B_t + G_t - T_t. \tag{2.72}$$

Si noti che il tasso di interesse al quale il governo può emettere debito è r_t e non $r_t + p$. Questo fatto risulterà importante in seguito. La (2.72) non impone alcuna restrizione effettiva sul comportamento del settore pubblico, si tratta esclusivamente di una identità contabile che registra le variazioni nel livello del debito pubblico in relazione ai disavanzi in cui il governo eventualmente incorre.

Imponiamo la condizione NPG:

$$\lim_{z\to\infty} B_z \,\mathrm{e}^{-\int_t^z r_\tau d\tau} = 0. \tag{2.73}$$

Integrando la (2.66) sotto il vincolo (2.67), otteniamo:

$$\begin{aligned}
B_z &= \mathrm{e}^{\int_t^z r_\tau d\tau}\left[B_t + \int_t^z (G_s - T_s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds\right] \\
B_z \,\mathrm{e}^{-\int_t^z r_\tau d\tau} &= B_t + \int_t^z (G_s - T_s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds \\
\lim_{z\to\infty} B_z \,\mathrm{e}^{-\int_t^z r_\tau d\tau} &= B_t + \int_t^\infty (G_s - T_s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds = 0 \\
B_t &= \int_t^\infty (T_s - G_s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds. \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

Questo è il vincolo di bilancio intertemporale del governo. Ess stabilisce che il livello corrente del debito deve essere uguale al valore attuale scontato degli avanzi primari. Se nel periodo corrente il governo è debitore netto, esso deve programmare avanzi primari per alcuni tra i periodi futuri. Va sottolineato che la (2.74) non impone che il debito venga alla fine ripagato, né che esso tenda ad un valore costante. L'unica implicazione della (2.74) è che il debito non finisca con il crescere più rapidamente del tasso di interesse.

Il governo influenza la domanda complessiva di beni (la domanda aggregata) in tre modi diversi: acquistando direttamente beni per un ammontare G, modificando il consumo del settore privato tramite le imposte (correnti o previste), oppure tramite il debito).

Consideriamo ora il consumo del settore privato, assumendo per semplicità $\alpha = 0$. Dobbiamo ora modificare le equazioni (2.58), (2.61) e (2.65) nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
C_t &= (\theta + p)(H_t + V_t) \\
V_t &= B_t + K_t && (2.75) \\
H_t &= \int_t^{\infty} (Y_z - T_z)\, \mathrm{e}^{-\int_t^z (r_\tau + p) d\tau} dz && (2.76) \\
\dot{V}_t &= r_t V_t + Y_t - C_t - T_t. && (2.77)
\end{aligned}
$$

La ricchezza finanziaria V include ora sia il debito del governo B, sia altre attività K: il debito pubblico costituisce chiaramente ricchezza per chi lo detiene. Il capitale umano è costituito dal valore attuale dei redditi futuri al netto delle imposte, con un tasso di sconto pari a $r + p$.

Consideriamo ora una riallocazione temporale delle imposte, mantenendo costante il sentiero di spesa del governo. Più precisamente assumiamo che le imposte vengano ridotte al tempo t e poi aumentate al tempo $t + s$. Dato il vincolo di bilancio e data l'ipotesi che il sentiero della spesa G rimanga costante, queste due variazioni devono soddisfare:

$$
dT_{t+s} = -dT_t\, \mathrm{e}^{\int_t^{t+s} r_\tau d\tau}, \tag{2.78}
$$

cioè l'aumento delle imposte deve essere uguale all'iniziale riduzione al tempo t, capitalizzata al tasso di interesse.

Dato che al tempo t il debito B_t rimane invariato (l'incremento del disavanzo, essendo un flusso, non si riflette istantaneamente in una variazione dello stock di debito), in quell'istante la riallocazione delle imposte ha un effetto sulla domanda aggregata solo nella misura in cui influenza il consumo tramite la variazione indotta nel capitale umano. In base alla (2.76), quest'ultima è pari a:

$$
dH_t = -dT_t - dT_{t+s}\, \mathrm{e}^{\int_t^{t+s} (r_\tau + p) d\tau},
$$

ovvero, servendoci della (2.78):

$$
\begin{aligned}
dH_t &= -dT_t + dT_t\, \mathrm{e}^{\int_t^{t+s} r_\tau d\tau}\, \mathrm{e}^{-\int_t^{t+s} (r_\tau + p) d\tau} \\
dH_t &= -dT_t \left[1 - \mathrm{e}^{-\int_t^{t+s} p d\tau} \right] \\
dH_t &= -dT_t \left[1 - \mathrm{e}^{-sp} \right]. && (2.79)
\end{aligned}
$$

Tenendo presente che $dT_t < 0$ (le imposte vengono ridotte al tempo t) la manovra, orientata ad un maggior disavanzo, comporta un aumento del capitale umano, dati i redditi lordi correnti e futuri e dato il tasso di interesse. Essa induce di conseguenza, un aumento del consumo aggregato. Tanto più lontana è la data cui le imposte vengono differite (cioè tanto più grande è s), tanto maggiore è questo effetto della riduzione delle imposte sul capitale umano.

Il punto cruciale è il seguente: l'esistenza di effetti reali di una riallocazione delle imposte deriva dal fatto che nel vincolo di bilancio del governo e nella definizione del capitale umano vengono utilizzati tassi di sconto differenti: r nel primo caso ed $r+p$ nel secondo. A sua volta questo riflette una parziale traslazione delle imposte sulle generazioni future. Si noti come $1-\mathrm{e}^{-sp}$ non sia altro che la probabilità che un individuo vivo in t non lo sia più al momento in cui il governo riscuoterà le imposte.

Nel caso limite $p=0$ in cui gli individui hanno vita infinita, la variazione della cadenza delle imposte non ha alcun impatto sul capitale umano, e quindi sul consumo e sulla domanda aggregata. In questo caso, una riduzione delle imposte, pur incrementando il reddito disponibile nel periodo corrente, si traduce in un aumento del risparmio privato. Il consumo non varia affatto, dato che l'incremento del risparmio privato assorbe completamente quello del reddito disponibile e quindi compensa esattamente la riduzione del risparmio del settore pubblico. Dato che gli individui sanno che prima o poi dovranno pagare maggiori imposte, sono pronti ad assorbire il debito emesso dal governo senza richiedere alcuna variazione nel tasso di interesse.

L'affermazione che non vi sia alcuna differenza tra finanziare la spesa in disavanzo o finanziarla con imposte nel periodo corrente (la cosiddetta *equivalenza ricardiana*) vale certamente nel modello di Ramsey, che coincide con il modello qui presentato quando $p=0$. Quando gli individui sono caratterizzati da un orizzonte temporale più breve ($p>0$), l'equivalenza ricardiana non è più verificata, per i motivi che abbiamo appena presentato.

Nelle pagine addietro abbiamo peraltro osservato che il modello con generazioni sovrapposte si comporta in modo analogo ad un modello con orizzonte infinito nel caso in cui gli individui intendano lasciare eredità, perchè interessati al benessere dei propri eredi. In tal caso la proposizione di equivalenza ricardiana risulta ancora valida.

Il fatto che gli individui abbiano un orizzonte finito è il motivo più ovvio del fallimento dell'ipotesi di equivalenza ricardiana. Ma è possibile individuarne anche altri. Il più importante fra questi è che gli operatori possono essere soggetti a vincoli di liquidità, ossia possono non essere in grado di prendere a prestito l'ammontare desiderato. In tal caso, se il governo riduce le imposte essi sono messi in condizione di poter spendere di più. È come se il governo prendesse a prestito al posto dei singoli individui.

La politica fiscale e i tassi di interesse. La questione che vogliamo ora approfondire riguarda gli effetti di variazioni nella politica fiscale in un contesto di equilibrio generale. Tenendo conto della politica fiscale, le equazioni (2.67) e (2.68), con $\alpha=0$, divengono:

$$\begin{aligned}\dot{C} &= (r-\theta)C - p(\theta+p)(B+K) && (2.80)\\ \dot{K} &= F(K) - C - G && (2.81)\\ \dot{B} &= rB + G - T && (2.82)\\ r &= F'(K). && (2.83)\end{aligned}$$

In steady state valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}(F'(K^*)-\theta)C^* &= p(\theta+p)(B^*+K^*) && (2.84)\\ F(K^*) &= C^* + G^* && (2.85)\\ F'(K^*)B^* &= T^* - G^*. && (2.86)\end{aligned}$$

Assumiamo che il livello della ricchezza privata $B^* + K^*$ in steady state sia positivo; assumiamo inoltre che, se il debito del settore pubblico dovesse essere negativo (eventualità storicamente rara), esso non sia 'troppo negativo'. In base alla (2.84), risulta allora che $r^* > \theta$. In questo caso l'equilibrio è dinamicamente efficiente.

Consideriamo ora la seguente manovra: il governo riduce temporaneamente le imposte, mantenendo costante la propria spesa. Il risultato è un aumento del disavanzo e del debito. Successivamente il governo aumenta le imposte per riportare in pareggio il bilancio; da quel momento determina il livello delle imposte con l'obiettivo di mantenere costante il livello del debito. In altri termini, stiamo considerando una sequenza di azioni di politica economica, il cui esito ultimo è quello di indurre un aumento del debito, pur lasciando inalterato il livello di G.

Sulla base delle (2.84) e (2.85) ci domandiamo quale sia l'effetto di questo aumento di B^* sullo stock di capitale di steady state. Partiamo con il derivare queste due equazioni rispetto B^*:

$$\begin{aligned} F''(K^*)\frac{dK^*}{dB^*}C^* + (F'(K^*) - \theta)\frac{dC^*}{dB^*} &= p(\theta + p)(1 + \frac{dK^*}{dB^*}) \\ F'(K^*)\frac{dK^*}{dB^*} &= \frac{dC^*}{dB^*}. \end{aligned}$$

Combinadole insieme otteniamo:

$$\begin{aligned} p(\theta + p)(1 + \frac{dK^*}{dB^*}) &= F''(K^*)\frac{dK^*}{dB^*}C^* + (F'(K^*) - \theta)F'(K^*)\frac{dK^*}{dB^*} \\ p(\theta + p) &= \frac{dK^*}{dB^*}\left[F''(K^*)C^* + (F'(K^*) - \theta)F'(K^*) - p(\theta + p)\right] \\ \frac{dK^*}{dB^*} &= \frac{p(\theta + p)}{F''(K^*)C^* + (r^* - \theta)r^* - p(\theta + p)}. \end{aligned}$$

Il consumo di equilibrio lo possiamo scrivere come:

$$C^* = r^*(B^* + K^*) + w - T,$$

dove w indica il salario. Sostituendo questa espressione nella (2.84):

$$\begin{aligned} \left[F'(K^*) - \theta\right] \cdot \left[F'(K^*)(B^* + K^*) + w - T\right] &= p(\theta + p)(B^* + K^*) \\ \left[F'(K^*) - \theta\right] F'(K^*)(B^* + K^*) + \left[F'(K^*) - \theta\right](w - T) &= p(\theta + p)(B^* + K^*) \\ \left[F'(K^*) - \theta\right] F'(K^*) - p(\theta + p) &= -\frac{\left[r^* - \theta\right](w - T)}{B^* + K^*}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dK^*}{dB^*} = \frac{p(\theta + p)}{F''(K^*)C^* + (r^* - \theta)(w - T)/(B^* + K^*)}. \tag{2.87}$$

Vediamo allora come condizione sufficiente affinchè un aumento del debito comporti una riduzione dello stock di capitale ($dK^*/dB^* < 0$) è che sia $w > T$, una condizione che possiamo assumere come verificata.

Ancora una volta troviamo risultati contrastanti con quelli derivati dal modello di Ramsey, in cui lo stock di capitale di steady state risultava dipendere esclusivamente dal tasso di preferenza temporale degli operatori.

Analizzando gli effetti sullo stock di capitale di un aumento di G, realizzato mantenendo costante il livello del disavanzo (avanzo) primario tramite un corrispondente aumento delle imposte, si osserva che la crescita di G riduce il capitale, risultato già osservato nel modello di Ramsey e in quello a generazioni sovrapposte.

Aggiustamento dinamico. Per semplicità di analisi, modifichiamo il modello considerando un'economia di puro scambio in cui il livello di produzione è esogeno e costante e non esiste capitale. Il tasso di interesse non dipende allora dallo stock di capitale, ma deve essere tale da eguagliare la domanda complessiva di beni all'offerta esogeneamente data. L'economia è ora descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{C} &= (r-\theta)C - p(\theta+p)B && (2.88) \\ Y &= C + G && (2.89) \\ \dot{B} &= rB + G - T. && (2.90) \end{aligned}$$

Se consideriamo politiche fiscali caratterizzate da un livello di spesa costante G, l'equazione (2.89), con Y costante, implica che $dC/dt = 0$. In equilibrio, il tasso di interesse nella (2.88) deve sempre essere tale da mantenere costante il livello del consumo. Risolvendo la (2.88) per $dC/dt = 0$, ricaviamo:

$$r = \theta + p(\theta+p) \cdot \frac{B}{Y-G}. \tag{2.91}$$

In questa semplice economia di puro scambio il tasso di interesse aumenta all'aumentare sia del livello del debito, sia del livello della spesa pubblica. I disavanzi registrati al tempo t non esercitano, al tempo t, alcun effetto ne' su G_t, ne' su B_t, ne' quindi sul tasso di interesse instantaneo al tempo t. I disavanzi influenzano tuttavia il livello del debito nel corso del tempo, e quindi i tassi futuri a breve termine e i tassi correnti a lungo termine. Per studiare la relazione fra disavanzi, debito e struttura per scadenza dei tassi di interesse, analizzeremo ora uno specifico esempio. Si consideri la sequenza di disavanzi associata all'equazione seguente:

$$\dot{B} = rB + G - T(B,x), \qquad T_B = \frac{\partial T}{\partial B} > r + B \cdot \frac{dr}{dB}, \quad T_x = \frac{\partial T}{\partial x} > 0. \tag{2.92}$$

Le imposte sono, per ipotesi, funzione crescente sia del livello del debito, sia del valore assunto da un parametro di spostamento x. L'esercizio che intendiamo condurre consiste in una riduzione di x, partendo da una situazione iniziale di bilancio in pareggio; le imposte diminuiscono e il disavanzo aumenta. Il debito cresce nel corso del tempo, e con esso le imposte, fino a quando il bilancio torna nuovamente in pareggio. La condizione su T_B assicura che al crescere di B le imposte aumentino più velocemente dell'onere sul debito. Per verificare quali siano gli effetti di questa politica sulla struttura dei tassi di interesse, introduciamo un tasso di lungo periodo. Questo non è altro che la remunerazione percentuale che si trae da una rendita perpetua che assicuri un flusso di reddito costante pari ad una unità. Sia R tale tasso di remunerazione, e $1/R$ il valore attuale di tale rendita. Il tasso di rendimento associato è:

$$\frac{1 + \frac{d1/R}{dt}}{1/R} = R - \frac{dR/dt}{R} = R - \frac{\dot{R}}{R}.$$

Fig. 2.5. La dinamica del tasso di interesse.

Esso è la somma del tasso di remunerazione e del guadagno atteso in conto capitale; quest'ultimo è negativo se il tasso di remunerazione aumenta. La condizione di arbitraggio tra titoli a lungo e a breve termine impone ovviamente che $R - \frac{\dot{R}}{R} = r$, o, equivalentemente,

$$\frac{\dot{R}}{R} = R - r. \tag{2.93}$$

Possiamo ora eliminare r sostituendo la (2.93) nella (2.91) e nella (2.92). Otteniamo così un sistema dinamico in R e B:

$$\begin{cases} r = \theta + p(\theta + p) \cdot \frac{B}{Y-G} \\ \dot{R} = R(R - r) \\ \dot{B} = rB + G - T(B, x) \end{cases} \tag{2.94}$$

il cui Jacobiano è:

$$J(R, B) = \begin{bmatrix} 2R - r & -R dr/dB \\ 0 & r + B dr/dB - T_B \end{bmatrix},$$

e i cui autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2R - r, \qquad \lambda_2 = r + B\frac{dr}{dB} - T_B.$$

I punti stazionari di (2.94) sono due: $(\tilde{R}, \tilde{B}) = (0, B^*)$ e $(R^*, B^*) = (r, B^*)$, dove B^* è tale che $r^*B^* + G - T(B^*, x) = 0$. Il punto $(\tilde{R}, \tilde{B})$ è caratterizzato da due autovalori negativi, infatti $\lambda_1 = -r < 0$ e $\lambda_2 < 0$ per la condizione imposta nella (2.92): $T_B > r + Bdr/dB$. Di conseguenza $(\tilde{R}, \tilde{B})$ è un punto fisso attrattivo. Per quanto concerne invece (R^*, B^*) gli autovalori valgono: $\lambda_1 = r > 0$ e $\lambda_2 < 0$, quindi il punto è di sella. Il luogo geometrico $dB/dt = 0$ è chiaramente una retta verticale passante per B^*, mentre il luogo geometrico $dR/dt = 0$ è inclinato positivamente, infatti derivando $R^* - r^* = 0$:

$$\frac{dR^*}{dB^*} = \frac{dr^*}{dB^*} = \frac{p(\theta + p)}{Y - G} > 0.$$

Il diagramma di fase del sistema è presentato in Fig. 2.5. Il punto E indica lo steady state (R^*, B^*).

Siamo anche in questo caso in grado di escludere che l'economia proceda lungo sentieri diversi da quello di sella SS? La risposta non è facile e neppure chiara. Lungo ciascuno di questi sentieri infatti B converge a B^*, mentre R diverge o tende a 0 a seconda che il sentiero parta al di sopra o al di sotto della curva SS. Ma nessuno di essi víola la condizione di trasversalità o quella di realizzabilità, come avveniva nei casi precedenti. Ci limitiamo comunque all'analisi del sentiero di sella.

Una diminuzione di x, ossia una riduzione delle imposte, sposta il luogo geometrico $dB/dt = 0$ verso destra (vedi Fig. 2.6). Partendo da E, il sistema 'salta' in C e poi R e B si muovono nel corso del tempo lungo CE'.

La diminuzione di x crea un disavanzo ed un conseguente incremento del debito. L'effetto sui tassi di interesse a breve termine è inizialmente contenuto, ma le previsioni di aumento del debito inducono effetti più rilevanti sui tassi a breve attesi. Nel momento in cui la politica viene posta in essere, pertanto, i tassi di interesse a lungo termine aumentano come riflesso dell'incremento dei tassi a breve attesi. Nel corso del tempo sia R che r convergono ai loro nuovi più elevati valori.

Questo semplice esempio suggerisce quali debbano essere gli effetti dei disavanzi in un modello che preveda accumulazione di capitale. La medesima sequenza di disavanzi comporterebbe un incremento dei tassi a lungo termine e una contrazione nell'accumulazione di capitale. Verrebbe raggiunto un nuovo equilibrio, caratterizzato da un maggior livello del debito e da un minor livello dello stock di capitale. Cosí, per esempio, se la maggiore spesa pubblica di un periodo bellico viene finanziata in disavanzo, alla fine della guerra l'economia si ritrova con meno capitale e più debito pubblico. È in questo senso che il finanziamento della spesa in deficit e un debito elevato impongono un 'onere' sull'economia: essi riducono l'accumulazione di capitale, e quindi lo stock di capitale disponibile per le generazioni future.

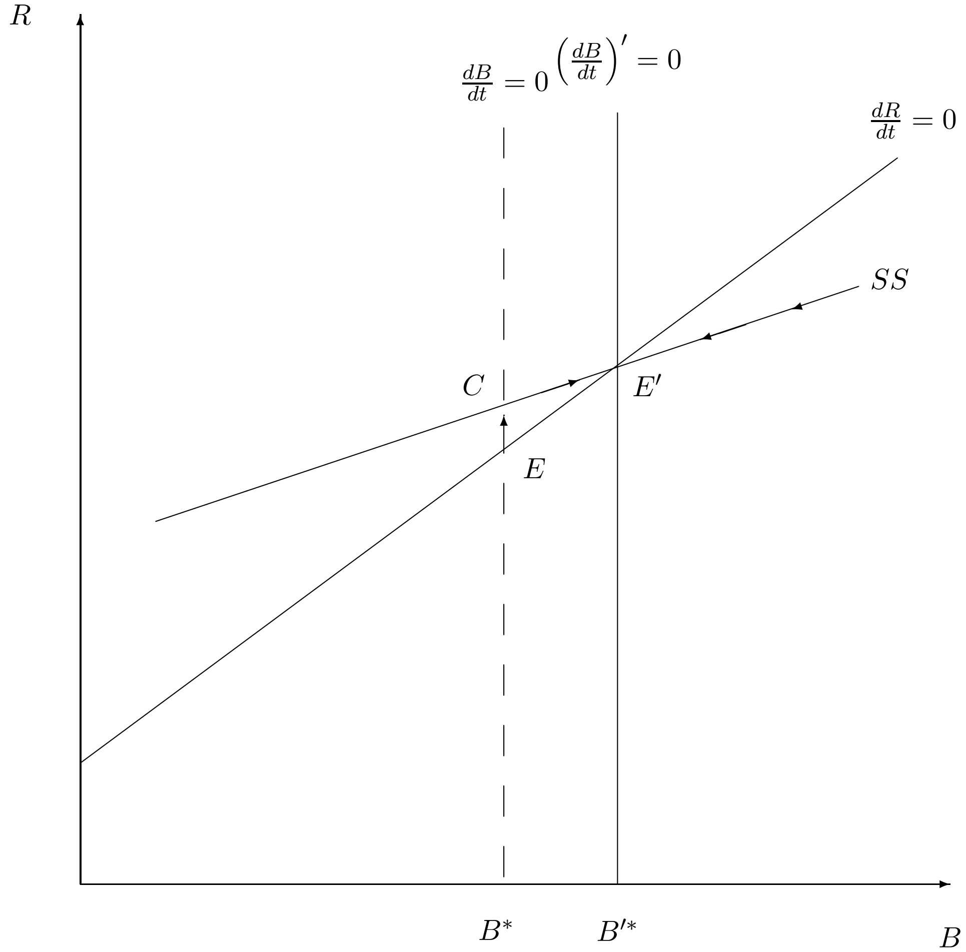

Fig. 2.6. Gli effetti di un temporaneo aumento del disavanzo.

2.5 Il risparmio aggregato ed il tasso di interesse

In questo paragrafo analizzeremo il problema dell'elasticità del risparmio rispetto al proprio tasso di rendimento, servendoci dei modelli sviluppati nelle precedenti pagine.

Gran parte delle controversie di cui è ricca la letteratura su questo tema deriva dall'incapacità di distinguere fra due differenti problemi. Il primo è quello della risposta del tasso di risparmio, in un dato istante, ad una variazione del tasso di rendimento; il secondo è quello dell'eventuale risposta della ricchezza aggregata a variazioni del suo rendimento. È possibile studiare sia le reazioni del risparmio (ossia del tasso di incremento della ricchezza), sia quelle della ricchezza aggregata (lo stock costituito dai risparmi accumulati in passato), al tasso di interesse.

La relazione tra tasso di interesse, dinamica della popolazione e crescita della produttività da un lato, risparmio aggregato o ricchezza aggregata dall'altro, è generalmente piuttosto complesso.

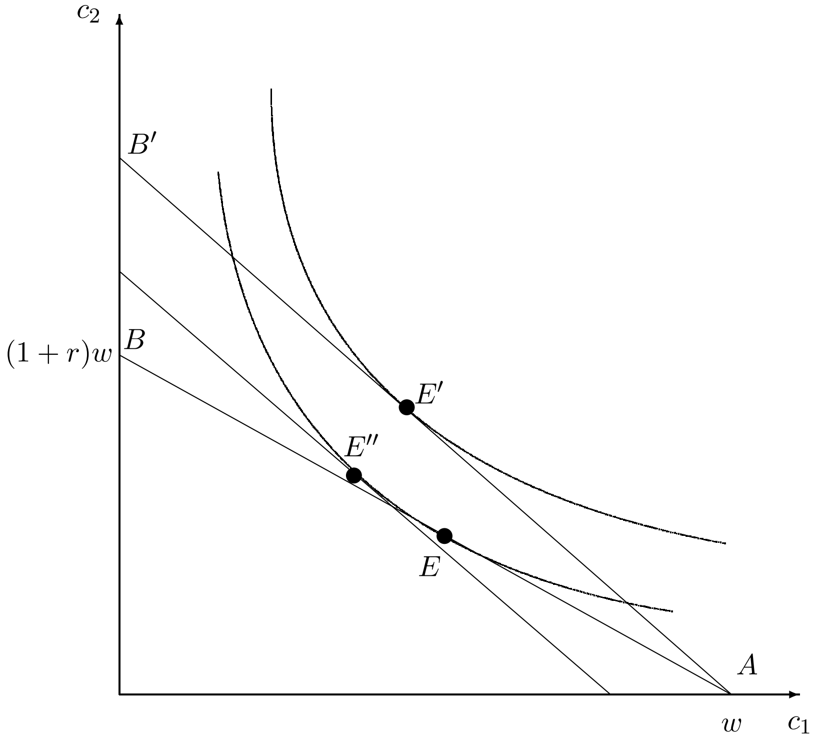

Fig. 2.7. Effetto di reddito ed effetto di sostituzione di una variazione del tasso di interesse.

Ci concentreremo su casi semplici, che consentano di illustrare le possibili situazioni estreme.

2.5.1 Il modello a due periodi

Iniziamo dal modello a generazioni sovrapposte, modello in cui gli agenti vivono per due periodi e non esistono eredità. L'offerta di capitale è uguale al risparmio dei giovani ed è pertanto individuata dalla loro funzione di risparmio:

$$s = s(w_t, r_{t+1}).$$

Il risparmio netto è uguale al risparmio dei giovani meno la 'distruzione' del risparmio da parte dei vecchi.

Si è visto che s_r è di segno ambiguo e dipende dall'importanza relativa degli effetti di sostituzione e di reddito. Questi effetti sono riportati nella Fig. 2.7. Un incremento del tasso di interesse sposta il vincolo di bilancio da AB a AB' e l'equilibrio da E a E'. Il movimento da E a E' può essere scomposto in uno da E a E'', lungo la medesima curva di indifferenza (l'effetto di sostituzione), e in uno da E'' a E' (l'effetto di reddito). Il risparmio aumenta quando l'effetto di sostituzione prevale su quello di reddito. In altri termini, il risparmio aumenta, rimane costante o diminuisce, in relazione al fatto che l'elasticità di sostituzione sia maggiore, uguale o minore dell'unità. Se la funzione di utilità è di tipo logaritmico, le variazioni del tasso di interesse non si riflettono in alcun modo sull'offerta di risparmio.

2.5.2 Il modello di perenne giovinezza

Per analizzare il problema in un contesto meno restrittivo, consideriamo il modello di perenne giovinezza con orizzonte finito e ci domandiamo come un incremento del tasso di interesse si rifletta sulle decisioni di risparmio. Assumiamo che il reddito da lavoro w sia costante nel corso del tempo e che ciascuno ne riceva un'identica proporzione ($\alpha = 0$). Sia il tasso di interesse r che il reddito non costituito da interessi w sono per ipotesi esogeni.

Possiamo interpretare un'analisi di questo tipo come un'analisi di equilibrio parziale, oppure come una descrizione del comportamento di una piccola economia aperta, con dotazioni date, e tasso di interesse determinato sul mercato mondiale.

Sotto le ipotesi che qui abbiamo fatto, il valore complessivo del capitale umano H_t, dato dalla (2.61), diventa:

$$\begin{aligned} H_t &= \int_t^\infty Y_z\, \mathrm{e}^{-\int_t^z (\alpha+p+r_\tau)d\tau} dz, \qquad \alpha = 0 \\ &= \int_t^\infty w\, \mathrm{e}^{-(z-t)(p+r)} dz \\ &= \frac{w}{p+r}\left[-\,\mathrm{e}^{-(z-t)(p+r)}\right]_t^\infty \\ &= \frac{w}{p+r}. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $V = K$, le equazioni (2.58) e (2.65) diventano:

$$C = (\theta+p)(H+K) = (\theta+p)(K + \frac{w}{p+r}) \tag{2.95}$$

$$\dot{K} = S = rK + w - C. \tag{2.96}$$

L'accumulazione di capitale è quindi governata dall'equazione differenziale:

$$\dot{K} = (r-p-\theta)K + w \cdot \frac{r-\theta}{r+p} \tag{2.97}$$

Lo stock di capitale di steady state K^* di questo sistema è soluzione dell'equazione:

$$(r-p-\theta)K^* + w \cdot \frac{r-\theta}{r+p} = 0 \tag{2.98}$$

$$K^* = w \cdot \frac{r-\theta}{(r+p)(\theta+p-r)}. \tag{2.99}$$

Evidentemente, se $\theta < r < p+\theta$, è $K^* > 0$. Inoltre:

$$\frac{dK^*}{dr} = \frac{w\left[(r-\theta)^2 + p(\theta+p)\right]}{(r+p)^2(\theta+p-r)^2} > 0.$$

Consideriamo inizialmente il caso in cui $\theta < r < p+\theta$. La dinamica è caratterizzata dal diagramma di fase di Fig. 2.8. Il consumo, dato il livello di ricchezza, soddisfa l'equazione

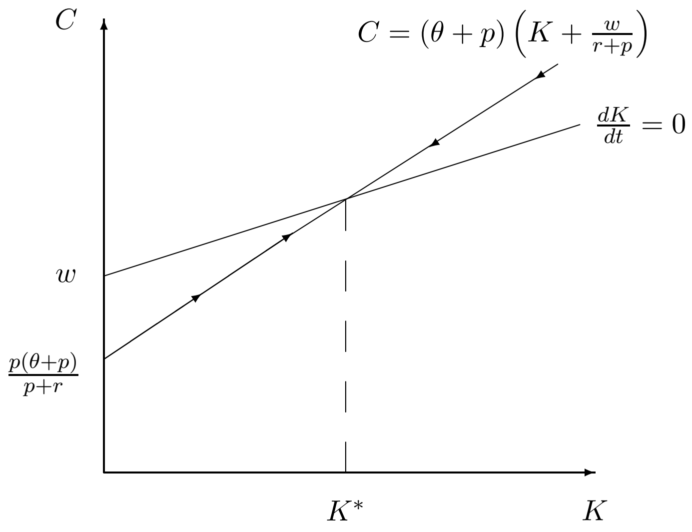

Fig. 2.8. La dinamica del consumo nel caso $\theta < r < p + \theta$.

(2.95). Il sistema dinamico (2.97) è stabile e convergente a K^*. Il luogo geometrico $dK/dt = 0$ ha equazione: $C = rK + w$.

La Fig. 2.9 mostra gli effetti di un aumento di r: il capitale umano $w/(r + p)$ diminuisce e con esso il consumo. Il luogo geometrico corrispondente alla (2.95) trasla quindi verso il basso e il luogo geometrico $dK/dt = 0$ ruota verso l'alto. Il nuovo livello di steady state K'^* è certamente maggiore di K^*.

Nella Fig. 2.9 il sentiero di aggiustamento verso il nuovo steady state è EBE'. Il risparmio è pari alla distanza verticale fra i due luoghi geometrici. Inizialmente esso aumenta da zero ad AB. Quando il tasso di interesse aumenta, il reddito aumenta in virtù dei maggiori pagamenti per interessi, il consumo si contrae a causa della diminuzione nel capitale umano. Entrambi questi effetti contribuiscono a far aumentare il risparmio. Man mano che si accumula ricchezza il consumo cresce più velocemente del reddito. Il nuovo equilibrio di steady state è caratterizzato da maggiore ricchezza, con un risparmio nuovamente uguale a zero. In questo modello l'effetto del tasso di interesse sul livello di steady state della ricchezza può essere piuttosto rilevante.

Che cosa accade se $r > \theta + p$? Questa è la situazione illustrata in Fig. 2.10. Benchè in tal caso esista un equilibrio con ricchezza negativa, si tratta di un equilibrio instabile. Partendo per esempio da una situazione con ricchezza nulla, il risparmio è positivo e crescente, con un'indefinita accumulazione di capitale. La presenza di un tasso di interesse elevato induce gli individui a posporre il consumo e a scegliere sentieri lungo i quali la ricchezza aumenta ad un tasso maggiore di p. Benchè la numerosità di ogni generazione si assottigli progressivamente ad un tasso p, la ricchezza complessiva di ciascuna generazione continua ad aumentare, e con essa la ricchezza aggregata. In tal modo, se r passa da un valore inferiore a $\theta + p$ ad uno superiore, gli effetti di lungo periodo sulla ricchezza sono di entità infinita. Si tratta, come è naturale, di un risultato di equilibrio parziale. Nel paragrafo 2.3 abbiamo visto come in steady state il tasso di interesse, in un'economia chiusa, sia inferiore a $\theta + p$.

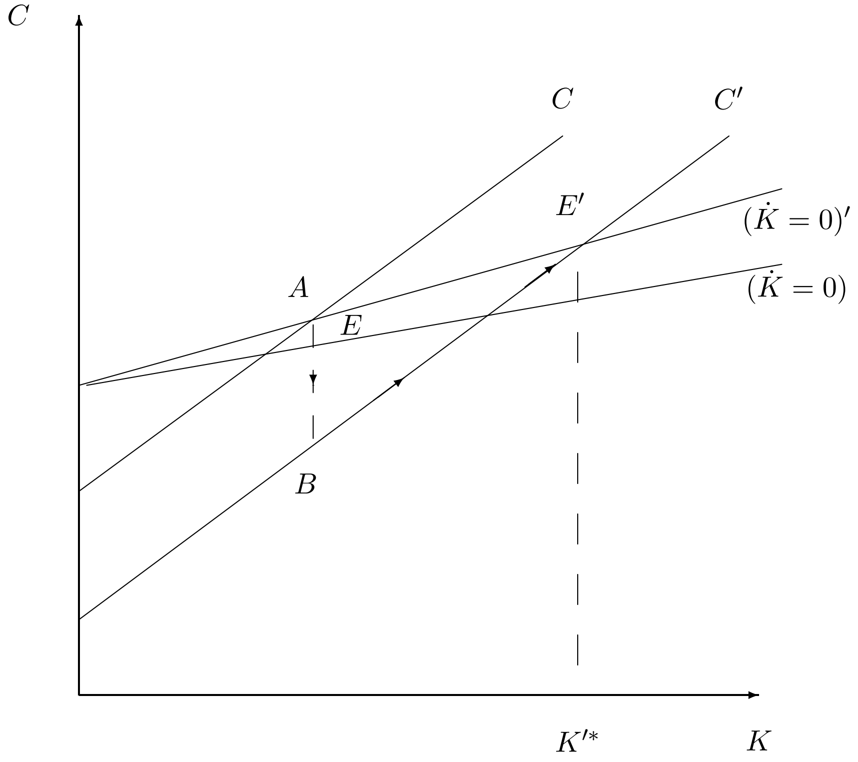

Fig. 2.9. Gli effetti di un aumento del tasso di interesse.

2.5.3 Il modello con orizzonte infinito

Qual'ÌŽeffetto sul risparmio di un incremento del tasso di interesse, quando gli agenti sono caratterizzati da orizzonte temporale infinito? Le condizioni del primo ordine derivate per il problema di Ramsey prevedevano che dC/dt avesse lo stesso segno di $r-\theta$. Questo implica che gli individua debbano accumulare indefinitamente se $r > \theta$, non accumulino affatto se $r = \theta$, e decumulino se $r < \theta$. Di conseguenza l'elasticità dell'offerta di capitale è infinita, anche se l'elasticità del flusso dei risparmi rispetto al tasso di interesse è finita.

Se gli agenti hanno orizzonte infinito, in steady statel'interesse ricevuto dai consumatori devev essere uguale al tasso di sconto (più, eventualmente, il tasso di crescita della popolazione). A questa medesima conclusione si può giungere tramite le equazioni (2.95) e (2.96), ponendo $p = 0$.

2.5.4 L'equilibrio generale

Un'infinita elasticità dell'offerta di ricchezza rispetto al tasso di interesse è naturalmente un risultato di equilibrio parziale, ossia un risultato derivato sotto l'ipotesi di ceteris paribus, in particolare con un tasso di interesse esogeneamente dato. In un modello più completo, l'effetto sullo stock di capitale di steady state di una politica che modifichi il tasso di rendimento del risparmio viene a dipendere anche dalla risposta del tasso di interesse all'incremento nello stock di ricchezza.

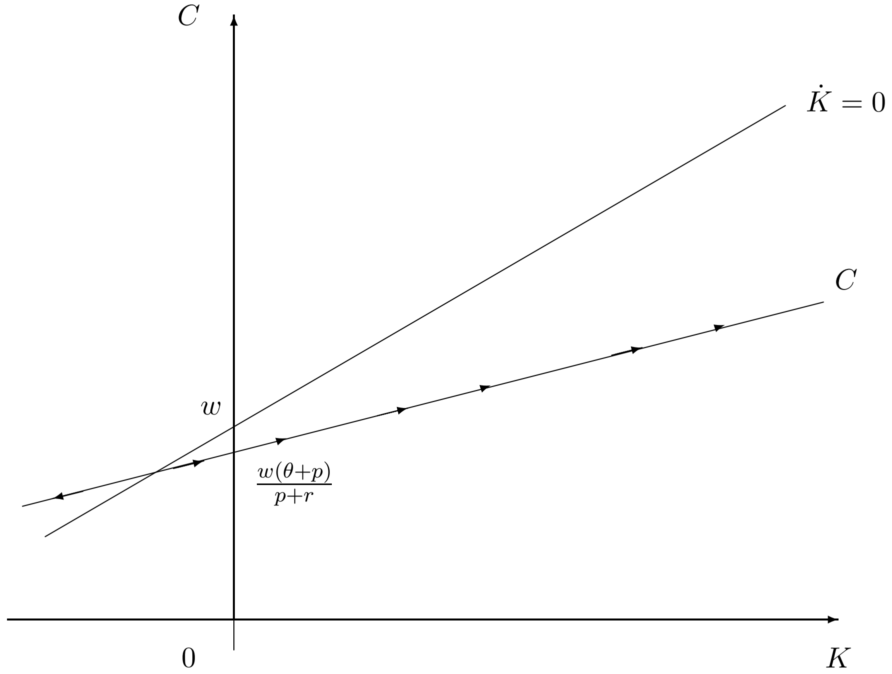

Fig. 2.10. Gli effetti di un aumento del tasso di interesse.

Consideriamo, in particolare, il modello di Ramsey che prevede, quale condizione di steady state, la golden rule modificata: $f'(k^*) = \theta + n$. Supponiamo ora che venga deciso di sussidiare il capitale, innalzando il rendimento percepito dai risparmiatori fino a $(1+\varepsilon)f'(k)$. La condizione di steady state diviene:

$$(1 + \varepsilon)f'(k^*) = \theta + n. \tag{2.100}$$

Per valutare l'effetto sullo stock di capitale di steady state di un aumento di ε, deriviamo la (2.100) rispetto ε valutandola in $\varepsilon = 0$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} f'(k^*) + (1 + \varepsilon)f''(k^*) \cdot \frac{dk^*}{d\varepsilon} &= 0, \qquad \varepsilon = 0 \\ \frac{dk^*}{d\varepsilon} &= -\frac{f'(k^*)}{f''(k^*)}. \end{aligned}$$

Ricordando che l'elasticità di sostituzione nella produzione è data da:

$$\sigma = -\frac{f'(k)w}{f''(k)f(k)k},$$

otteniamo:

$$\frac{dk^*/d\varepsilon}{k^*} = \frac{\sigma f(k^*)}{w}.$$

Al tasso di interesse iniziale, il sussidio al capitale stimola il risparmio, riducendo il tasso di interesse. Gli effetti di steady state sono interamente determinati dalle caratteristiche della funzione di produzione: tanto maggiore è l'elasticità di sostituzione e tanto minore è la quota dei salari sul prodotto complessivo, tanto maggiore è l'effetto del sussidio sui redditi da interesse. L'importanza dell'elasticità di sostituzione dipende dal fatto che l'accumulazione di capitale si interrompe quando il tasso di interesse netto è aumentato fino al suo precedente livello, e questo richiede un aumento nello stock di capitale tanto maggiore quanto più sostituibili sono capitale e lavoro.

La conclusione che dobbiamo trarre da tutti questi esercizi è che la teoria si esprime decisamente a favore di una elasticità positiva del risparmio rispetto al tasso di interesse. La ricerca empirica, tuttavia, pur estesa ed approfondita, non ha confermato valori così elevati per le elasticità del risparmio e della ricchezza rispetto al tasso di interesse. Una possibile spiegazione è che gli esperimenti condotti nelle pagine precedenti si riferiscono agli effetti di variazioni permanenti dei tassi reali, variazioni raramente riscontrabili nella realtà. Empiricamente si osservano più spesso movimenti di natura temporanea, che proprio in quanto tali possono avere riflessi limitati sul capitale umano. Dato che si tratta di variazioni non durature, le elasticità che osserviamo sono di breve periodo. Ed è probabile che l'elasticità di breve periodo del risparmio sia inferiore rispetto a quella di lungo periodo. Quando l'elasticità di sostituzione è piccola, l'effetto di un incremento dei tassi di interesse sul tasso di risparmio può inizialmente essere negativo, e divenire positivo solo in una fase successiva. Un'altra spiegazione è che le formalizzazioni dei comportamenti di risparmio presentati in questo e nel precedente capitolo trascurino un altro fattore cruciale in questo ordine di decisioni, e quindi sovrastimino i potenziali effetti del tasso di interesse sul risparmio e sulla ricchezza.

Appendice Matematica.

A.2 Condizioni di trasversalità su orizzonte infinito.

Consideriamo il classico problema di controllo ottimo (che d'ora in poi indicheremo con P1): trovare una funzione vettoriale di controllo u_t continua a tratti e una funzione vettoriale di stato associata x_t, continua e derivabile a tratti, definite sull'intervallo $[t_0, \infty]$, che massimizzano

$$\int_{t_0}^{\infty} F(x_t, u_t, t)\, dt \tag{2.101}$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_t = f(x_t, u_t, t), \qquad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, && (2.102)\\
&x_{t_0} = x_0 \quad \text{dato} && (2.103)\\
&u_t \in U \subseteq \mathbb{R}^r, \qquad U \text{ è un fissato sottoinsieme di } \mathbb{R}^r. && (2.104)
\end{aligned}$$

con le condizioni terminali:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x_t^i \quad \text{esiste ed è eguale a } x_F^i \qquad & i = 1, \ldots, l && (2.105)\\
\underline{\lim}_{t\to\infty} x_t^j \geq x_F^j \qquad & j = l+1, \ldots, m && (2.106)\\
\text{nessuna condizione su } x_t^k \text{ quando } t \to \infty \qquad & k = m+1, \ldots, n. && (2.107)
\end{aligned}$$

Assumiamo inoltre che:

$$F(x,u,t) \text{ e } \frac{\partial F(x,u,t)}{\partial x^j} \text{ siano continue rispetto le variabili } x,\ u \text{ e } t, \text{ per } j = 1, \ldots, n; \tag{2.108}$$

$$f^i(x,u,t) \text{ e } \frac{\partial f^i(x,u,t)}{\partial x^j} \text{ siano continue rispetto le variabili } x,\ u \text{ e } t, \text{ per } i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.109}$$

Definiamo infine la funzione Hamiltoniana:

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda_0 F(x, u, t) + \lambda f(x, u, t), \tag{2.110}$$

dove λ_0 è una costante e $\lambda_t \in \mathbb{R}^n$ è una variabile ausiliaria associata all'equazione differenziale (2.102).

Se l'integrale (2.101) non converge per qualche sentiero ammissibile, la massimizzazione perde chiaramente di significato. In questo caso si possono formulare quattro differenti criteri alternativi di ottimalità, che andiamo qui a presentare in ordine crescente di 'severità'.

Sia (x_t, u_t) una qualsiasi coppia ammissibile e sia (x_t^*, u_t^*) la coppia che intendiamo testare per l'ottimalità. Definiamo:

$$\Delta_t = \int_{t_0}^{t} F(x_\tau^*, u_\tau^*, \tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t} F(x_\tau, u_\tau, \tau)\, d\tau.$$

1. (x_t^*, u_t^*) è ottimale a tratti (*piecewise optimal*, PW-optimal), se, per ogni $T \geq t_0$, la sua restrizione su $[t_0, T]$ è ottimale per il corrispondente problema ad orizzonte fissato, con $x_T = x_T^*$ come condizione finale, e con $\int_0^T F(x_t, u_t, t)\, dt$ come criterio di ottimalità.
2. se $\overline{\lim}_{t\to\infty}\Delta_t = \limsup_{\tau\to\infty}\{\Delta_t : t \in [\tau, \infty)\} \geq 0$, diciamo invece che x_t^* 'raggiunge saltuariamente' x_t (*sporadically catches up*), cioè per ogni $\varepsilon \geq 0$ ed ogni t' esiste qualche $t \geq t'$ tale per cui $\Delta_t \geq -\varepsilon$.
3. Se $\underline{\lim}_{t\to\infty}\Delta_t = \liminf_{\tau\to\infty}\{\Delta_t : t \in [\tau, \infty)\} \geq 0$, diciamo invece che x_t^* 'raggiunge' (*catches up*) x_t; in altri termini per ogni $\varepsilon \geq 0$ esiste un t' tale che, se $t \geq t'$, allora $\Delta_t \geq -\varepsilon$.
4. Se esiste un numero t' tale che $\Delta_t \geq 0$, per ogni $t \geq t'$, allora diciamo che x_t^* 'sorpassa' (*overtakes*) x_t.

Se x_t^* sorpassa, raggiunge o raggiunge sporadicamente qualsiasi altra traiettoria ammissibile x_t, diremo che x_t^* è rispettivamente OT-ottimale, CU-ottimale o SCU-ottimale.

Si può dimostrare che vale la seguente catena di implicazioni (cfr. [11], pp. 232-233):

$$\text{OT-ottimale} \Rightarrow \text{CU-ottimale} \Rightarrow \text{SCU-ottimale} \Rightarrow \text{PW-ottimale}.$$

Fra i diversi risultati disponibili per problemi di controllo ottimo su orizzonte infinito è prima di tutto opportuno enunciare il seguente teorema che rappresenta una estensione della condizione sufficiente di Mangasarian:

Teorema 2.1 *Consideriamo il problema di ottimizzazione P1, con U convessa, congiuntamente al criterio di CU-ottimalità. Assumiamo, insieme alle (2.108) e (2.109), che le derivate parziali di $F, f_1, \ldots, f_n$ rispetto u siano continue. Supponiamo che (x_t^*, u_t^*) sia una coppia ammissibile e che esista una funzione continua λ_t tale che per $\lambda_0 = 1$ e per tutti i $t \geq t_0$:*

$$u_t^* \text{ massimizza } H(x_t^*, u_t, \lambda_t, t) \text{ per } u_t \in U; \tag{2.111}$$

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \qquad \text{dove} \quad -\frac{\partial H^*}{\partial x} = H_x'(x_t^*, u_t^*, \lambda_t, t); \tag{2.112}$$

$$H(x_t, u_t, \lambda_t, t) \text{ è concavo in } (x, u) \text{ per ogni } t \geq t_0; \tag{2.113}$$

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\lambda_t(x_t - x_t^*) \geq 0 \quad \text{per ogni } x_t \text{ ammissibile,} \tag{2.114}$$

dove $H(x_t, u_t, \lambda_t, t)$ è definita dalla (2.110). Allora (x_t^*, u_t^*) è CU-ottimale. Se si impone la concavità stretta in (2.113), (x_t^*, u_t^*) è anche l'unica soluzione.

In [10] risultati analoghi sono ottenuti anche per la OT- e la SCU-ottimalità.

Dimostrazione Si vedano [10] e [11], pp. 235.

La condizione (2.114) è vera se le seguenti condizioni sono valide per ogni x_t ammissibile:

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\lambda_t^i(x_F^i - x^{*i}) \geq 0 \quad \text{e} \quad \exists M : |\lambda_t^i| \leq M \ \forall t \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (2.115)$$
$$\exists t' : \lambda_t^j \geq 0 \ \forall t \geq t', \text{oppure } \exists P : |x_t^j| < P \ \forall t \text{ e } \underline{\lim}_{t\to\infty}\lambda_t^j \geq 0 \qquad j = l+1, \ldots, m \quad (2.116)$$
$$\exists Q : |x_t^k| < Q \ \forall t \text{ e } \lim_{t\to\infty} \lambda_t^k = 0 \qquad k = m+1, \ldots, n. (2.117)$$

La dimostrazione che [(2.115)+ (2.116)+(2.117)] $\Longrightarrow$ (2.114) è contenuta in [10]. Nessuna delle condizioni (2.115), (2.116) e (2.117) può essere omessa, contrariamente alle affermazioni implicite od esplicite fatte in molta letteratura economica, quale ad esempio [1]. D'altro canto (2.114) $\not\Longrightarrow$ [(2.115)+ (2.116)+(2.117)], come mostra il seguente esempio tratto da [7].

Esempio 2.1 Si consideri il problema: massimizzare secondo il criterio di CU-ottimalità il funzionale:

$$\int_0^\infty u_t(1 - x_t)dt, \qquad u_t \in [0, 1] \tag{2.118}$$

sotto i vincoli:

$$\dot{x}_t = u_t(1 - x_t), \qquad x_0 = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} x_t \text{ libero.} \tag{2.119}$$

Iniziamo con l'integrare direttamente l'equazione differenziale a variabili separabili indicata nella (2.119).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_t}{1 - x_t} &= u_t dt \\
\int_0^t \frac{1}{1 - x_s} dx_s &= \int_0^t u_s ds \equiv G_t \\
-[\log|1 - x_s|]_0^t &= G_t \\
x_t &= 1 - \mathrm{e}^{-G_t}.
\end{aligned}$$

Essendo $u_t \in [0, 1] \ \forall t$, $G_t \geq 0 \ \forall t$. Inoltre:

$$\int_0^T u_t(1 - x_t)d_t = \int_0^T \dot{x}_t dt = x_T = 1 - \mathrm{e}^{-G_T}.$$

Segue che qualsiasi scelta del controllo u_t tale che G_t si avvicina ad infinito al tendere di t ad infinito, è ottimale. In particolare $u_t^* = 1/2$, $x_t^* = 1 - \mathrm{e}^{-t/2}$ è ottimale.

Vediamo di ricavare ora la variabile ausiliaria λ_t. L'Hamiltoniano è:

$$H(x_t, u_t, \lambda_t, t) = \lambda_0 u_t(1 - x_t) + \lambda_t u_t(1 - x_t) = (\lambda_0 + \lambda_t)u_t(1 - x_t),$$

e la condizione (2.112) è:

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H}{\partial x_t} = (\lambda_0 + \lambda_t)u_t.$$

Si osservi che $u_t^* = 1/2\ \forall t$ può massimizzare l'Hamiltoniano solo se $\lambda_0 + \lambda_t = 0\ \forall t$. Di conseguenza $\lambda_0 = 0$ è impossibile poiché, per il Principio del Massimo (cfr. ad es. [11], pp. 75-76), deve essere $(\lambda_0, \lambda_t) \neq (0, 0)$. Quindi $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_t = -1\ \forall t$.

Di conseguenza $\lim_{t\to\infty} \lambda_t = -1$. Ciò significa che non è soddisfatta la 'naturale' condizione di trasversalità $\lim_{t\to\infty} \lambda_t = 0$, corrispondente alla condizione finale '$\lim_{t\to\infty} x_t$ libero'.

Al contempo però la condizione (2.114) è soddisfatta. Infatti:

$$\lambda_t(x_t - x_t^*) = -1[1 - \mathrm{e}^{-G_t} - (1 - \mathrm{e}^{-t/2})] = \mathrm{e}^{-G_t} - \mathrm{e}^{-t/2},$$

da cui:

$$\lambda_t(x_t - x_t^*) \geq 0 \quad \text{per} \quad 2G_t \leq t.$$

Quindi, essendo $G_t \leq P\ \forall t$, per $t \to \infty$ è sicuramente $\underline{\lim}_{t\to\infty} \lambda_t(x_t - x_t^*) \geq 0$.

Va sottolineato che la seguente implicazione è errata:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t \geq 0, \lim_{t\to\infty} \lambda_t x_t^* = 0, x_t \geq 0\ \forall t \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \lambda_t(x_t - x_t^*) \geq 0.$$

Supponendo infatti che $\lambda_t = -\mathrm{e}^{-t}$, $x_t = \mathrm{e}^t$ e $x_t^* = 1$, si vede chiaramente che $\lim_{t\to\infty} \lambda_t(x_t - x_t^*) = -1$.

È notoriamente difficile ottenere un insieme completo di condizioni necessarie per i problemi di controllo ottimo ad orizzonte infinito. Estendere 'meccanicamente' le condizioni di trasversalità dal problema ad orizzonte finito a quello con orizzonte infinito è assai spesso errato.

Vediamo a tal proposito alcuni risultati che forniscono un intero 'set' di condizioni necessarie.

Teorema 2.2 *Consideriamo il problema P1, ed assumiamo che (x_t^*, u_t^*) sia CU-ottimale. Supponiamo, in aggiunta alle condizioni (2.108) e (2.109), che $\int_0^\infty |F(x_t^*, u_t^*, t)|dt < \infty$ e $\int_0^\infty |f^i(x_t^*, u_t^*, t)|dt < \infty$ per $i = 1, \dots n$, e che inoltre esistano numeri non negativi A, B, C, a, b, c, con $a > 0$ e $b > c$ tali che le seguenti 'condizioni sulla crescita' siano soddisfatte per ogni $t \geq t_0$ e ogni x. Definito $G_{ij} = \partial f^i(x_t, u_t^*, t)/\partial dx^j$ e $F = f_0$, per $i = 0, 1, \dots m$ sia:*

$$|G_{ij}| \leq A\,\mathrm{e}^{-at}, \quad j = 1, \dots, m \qquad |G_{ij}| \leq B\,\mathrm{e}^{-bt}, \quad j = m+1, \dots, n; \tag{2.120}$$

e, per $i = m+1, \dots n$, sia:

$$|G_{ij}| \leq C\,\mathrm{e}^{-ct}, \quad j = 1, \dots, m \qquad |G_{ij}| \leq c, \quad j = m+1, \dots, n. \tag{2.121}$$

Esiste allora un numero λ_0, $\lambda_0 = 0$ o $\lambda_0 = 1$, e una funzione ausiliaria λ_t differenziabile con continuità, tale che, per ogni $t \geq t_0$:

$$H(x_t^*, u_t^*, \lambda_t, t) \geq H(x_t^*, u, \lambda_t, t) \qquad \forall u \in U. \tag{2.122}$$

La funzione λ_t soddisfa la seguente condizione: esiste un vettore $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$ tale che, se $\lambda_t(T)$ è la soluzione dell'equazione:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x_t^*, u_t^*, \lambda, t)}{\partial x}$$

nell'intervallo $[t_0, T]$ *con* $\lambda_T(T) = \lambda^*$, *allora esiste il limite:*

$$\lambda_t = \lim_{T\to\infty} \lambda_t(T). \tag{2.123}$$

Inoltre $(\lambda_0, \lambda_t) \neq (0,0)$ *per ogni* t *e* λ^* *soddisfa la condizione* $(\lambda_0, \lambda^*) \neq (0,0)$ *e:*

$$\textit{nessuna condizione su } \lambda^{*i} \qquad i = 1, \ldots, l \tag{2.124}$$

$$\lambda^{*j} \geq 0 \; (= 0 \, se \, \overline{\lim}_{t\to\infty} x_t^{*j} > x_F^j) \qquad j = l+1, \ldots, m \tag{2.125}$$

$$\lambda^{*k} = 0 \qquad k = m+1, \ldots, n. \tag{2.126}$$

Si osservi che le condizioni (2.123), (2.124), (2.125) e (2.126) implicano che $\lambda^* = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$ esiste e soddisfa le (2.124), (2.125), (2.126).

Inoltre, per $k = m+1, \ldots, n$, corrispondente alla condizione '$\lim_{t\to\infty} x^k$ libero' (assenza di condizione sullo stato finale), segue dalle condizioni del teorema (2.2) la 'naturale' condizione di trasversalità:

$$\lambda_t^j \to 0 \qquad \text{per} \quad t \to \infty.$$

Per il problema ad orizzonte infinito senza condizioni terminali, in cui f non è funzione di t $(f(x,u,t) = f(x,u))$, $F = \mathrm{e}^{-\theta t} g(x,u)$ e dove l'ammissibilità richiede la convergenza del funzionale criterio, [9] ha dimostrato il seguente teorema:

Teorema 2.3 *Una condizione necessaria affinché* (x_t^*, u_t^*), $0 \leq t \leq \infty$, *sia una soluzione ottimale del problema è che esista un numero reale* a, *un vettore* $A \in \mathbb{R}^n$, *e le funzioni continue* λ_t *e* μ_t, *a valori in* $\mathbb{R}^n$ *ed* $\mathbb{R}$ *rispettivamente, tali che:*

1. $(a, A) \neq (0,0)$ *e* $a \geq 0$;
2. λ_t *è la soluzione di:*

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H^*}{\partial x} = -a\mathrm{e}^{-\theta t} \frac{\partial g}{\partial x}(x_t^*, u_t^*) - \lambda_t \frac{\partial f}{\partial x}(x_t^*, u_t^*) \\ \lambda_0 = A; \end{cases} \tag{2.127}$$

3. μ_t *è soluzione di:*

$$\begin{cases} \dot{\mu}_t = -\theta a \, \mathrm{e}^{-\theta t} g(x_t^*, u_t^*) \\ \lim_{t\to\infty} \mu_t = 0; \end{cases} \tag{2.128}$$

4. *per ogni* t *nel quale* u_t^* *è continua, l'Hamiltoniano:*

$$a \, \mathrm{e}^{-\theta t} g(x_t^*, u) + \lambda_t f(x_t^*, u)$$

è massimo sull'insieme U *in* $u = u_t^*$;

5. *il massimo* H_t^* *dell'Hamiltoniano verifica per ogni* t:

$$H_t^* = a \, \mathrm{e}^{-\theta t} g(x_t^*, u_t^*) + \lambda_t f(x_t^*, u_t^*) = -\mu_t. \tag{2.129}$$

Dimostrazione Si veda [9].

La conclusione (2.129) stabilisce che il limite del massimo dell'Hamiltoniano H_t^* è zero quando t va all'infinito. Questa condizione necessaria aggiuntiva è utile particolarmente per quei problemi nei quali le condizioni (2.120) e (2.121) non sono soddisfatte. [9] mostra inoltre che la proprietà $H^*(\infty) = 0$ implica la 'naturale' condizione di trasversalità $\lambda(\infty) = 0$:

Corollario 2.1 *Assumiamo che:*

1. *$g(x_t^*, u) \geq 0$, $u \in U$, per ogni t sufficientemente grande;*
2. *esista un intorno V di 0 in $\mathbb{R}^n$ che è contenuto nell'insieme $\{f(x_t^*, u) : u \in U\}$ per tutti i t sufficientemente grandi (ciò assicura che l'insieme $\{f(x_t^*, u) : u \in U\}$ abbia interno non vuoto in $\mathbb{R}^n$).*

Allora una soluzione ottimale sull'orizzonte infinito verifica, oltre alle condizioni del teorema (2.3) la condizione di trasversalità $\lim_{t\to\infty} \lambda_t^* = 0$.

Esempio 2.2 Ritorniamo all'esempio 2.1: si massimizzi:

$$\int_0^\infty (1 - x_t)u_t dt \qquad u_t \in (\alpha, \beta), \quad \alpha < 1 < \beta,$$

sotto i vincoli:

$$\dot{x}_t = (1 - x_t)u_t, \qquad x_0 = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} x_t \text{ libero.}$$

Si è visto che ogni controllo, tale che $\int_0^\infty u_t dt = \infty$, è ottimale. Se scegliamo $u_t^* = 1$, il massimo dell'Hamiltoniano $(\lambda_0 + \lambda_t)(1 - x_t^*)u_t$ viene raggiunto solo se $\lambda_t = -\lambda_0$, con $(\lambda_0, \lambda_t) \neq (0, 0)$. Tenendo presente che:

$$x_t^* = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^\infty u_t^* dt},$$

avremo $\lim_{t\to\infty} x_t^*$ e l'insieme $\{f(x_t^*, u) : u \in U\} = \{(1 - x_t^*)u_t : \alpha < u < \beta\}$ contiene un dato intorno V di 0 per t sufficientemente grande solo se $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$. In tal caso l'assunto $g(x_t^*, u_t) = (1 - x_t^*)u_t \geq 0$ del corollario 2.1 non è però verificato.

Ecco ora una condizione sufficiente strettamente legata al teorema (2.2):

Teorema 2.4 *Consideriamo il problema P1, con il criterio di CU-ottimalità. Assumiamo che $\partial F/\partial u$ e $\partial f/\partial u$ esistano e siano continue, e che:*

$$F \text{ ed } f \text{ siano non decrescenti in } x \text{ per ogni } (u,t) \text{ e concave in } (x,u) \text{ per ogni } t. \tag{2.130}$$

Sia (x_t^*, u_t^*) una coppia ammissibile per la quale esiste un vettore λ^* che soddisfa le (2.124), (2.125) e (2.126), con la condizione λ^{*i} estesa a $i = 1, \ldots, l$ e con $\lambda^* = \lambda_T(T)$, dove $\lambda_t(T)$ è soluzione della (2.112) tale che:

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x_T^*, u_t^*, \lambda_t(T), t)}{\partial u} \cdot (u_t^* - u_t) dt \geq 0, \tag{2.131}$$

per ogni traiettoria ammissibile u_t. Allora (x_t^*, u_t^*) è ottimale.

B.2 Condizioni di trasversalità su orizzonte finito.

Consideriamo il problema classico di controllo ottimo:

$$\text{Opt } J(u) = \int_0^T F(x_t, u_t, t)dt + F_1(x_T, T),$$

sotto i vincoli:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_t & = & f(x_t, u_t, t) \\ x_0 \text{ dato} & & t_0 = 0. \end{array}$$

La funzione finale può chiaramente essere riscritta come:

$$F_1(x_T, T) = F_1(x_0, 0) + \int_0^T \frac{d}{dt} F_1(x_t, t)dt.$$

Il problema diventa quindi:

$$\begin{aligned} \text{Opt } J(u) &= F_1(x_0, 0) + \int_0^T \left[F(x_t, u_t, t) + \frac{d}{dt} F_1(x_t, t) \right] dt \\ &= F_1(x_0, 0) + \int_0^T \left[F(\cdot) + \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right] dt. \end{aligned}$$

Il termine $F_1(x_0, 0)$ può ovviamente essere omesso, essendo una costante (x_0 e t_0 sono infatti fissati).

Il problema può allora essere riformulato nei seguenti termini:

$$\text{Opt } J_a(u) = \int_0^T G(x_t, \dot{x}_t, \lambda_t, u_t, t)dt,$$

dove:

$$\begin{aligned} G(x_t, \dot{x}_t, \lambda_t, u_t, t) &= F(\cdot) + \lambda_t [f(\cdot) - \dot{x}_t] + \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &= H(x_t, u_t, \lambda_t, t) - \lambda_t \dot{x}_t + \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Esso può essere affrontato mediante il calcolo delle variazioni. La condizione necessaria del prim'ordine è:

$$\delta J_a(u) = \int_0^T \left[\left(G_x - \frac{d}{dt} G_{\dot{x}} \right) \delta x + G_u \delta u + G_\lambda \delta \lambda \right] dt + [G_{\dot{x}} \delta x + (G - G_{\dot{x}} \dot{x}) \delta t]_{t=T} = 0.$$

Prima di tutto deve essere soddisfatta l'equazione di Eulero:

$$\begin{aligned} G_x - \frac{d}{dt} G_{\dot{x}} &= H_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda \right) \\ &= H_x + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\dot{x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial t} + \dot{\lambda} \\ &= H_x + \dot{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\dot{\lambda} = -H_x. \tag{2.132}$$

Analogamente, essendo δu e $\delta\lambda$ variazioni arbitrarie indipendenti, i loro coefficienti devono annullarsi, cioè $G_u = 0$ e $G_\lambda = 0$. In altri termini:

$$\begin{aligned} H_u &= 0 & (2.133)\\ H_\lambda = \dot{x} &= f(x,u,t). & (2.134)\end{aligned}$$

Infine, la condizione di trasversalità relativa all'ultimo termine è:

$$[G_{\dot{x}}\delta x + (G - G_{\dot{x}}\dot{x})\delta t]_{t=T} = 0. \tag{2.135}$$

Poichè:

$$\begin{aligned} G_{\dot{x}} &= -\lambda + \frac{\partial F_1}{\partial x}\\ G - G_{\dot{x}}\dot{x} &= H - \lambda\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \lambda\dot{x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t},\end{aligned}$$

ne consegue che la (2.135) diventa:

$$\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda\right)\delta x\right]_{t=T} + \left[\left(H(\cdot) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\delta t\right]_{t=T} = 0. \tag{2.136}$$

Nel caso in cui anche x_0 e t_0 non sono specificati, si dimostra agevolmente che la condizione (2.136) diventa:

$$\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda\right)\delta x\right]_{t=t_0}^{t=T} + \left[\left(H(\cdot) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\delta t\right]_{t=t_0}^{t=T} = 0. \tag{2.137}$$

Vediamo ora di ricavare le condizioni di trasversalità per alcuni casi particolari:

1. `Tempo finale` T `fissato`. In questo caso è $\delta T = 0$ e pertanto la (2.136) diventa:

   $$\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda\right)\delta x\right]_{t=T} = 0.$$

   Si possono quindi verificare le seguenti situazioni:

   (a) `lo stato finale` x_T `è fissato`; chiaramente $\delta x_T = 0$ e quindi non vi è alcuna condizione di trasversalità ;

   (b) `lo stato finale` x_T `è libero`; si ha $\delta x_T \neq 0$ e di conseguenza:

   $$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{t=T} = \lambda_T;$$

   se la funzione finale F_1 non è presente nel problema, allora la condizione di trasversalità si riduce ulteriormente a:

   $$\lambda_T = 0;$$

(c) `lo stato finale` x_T `giace sulla varietà` $g[x_t, t] = 0$ `per` $t = T$; la condizione di trasversalità si esprime come:

$$(R_x - \lambda)\delta x|_{t=T} = 0,$$

dove:

$$\begin{aligned} R(x_T, T) &= F_1(x_T, T) + \mu \cdot g(x_T, T) \\ R_x \equiv \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned}$$

Quindi la condizione di trasversalità diventa:

$$\lambda_T = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad g(x_T, T) = 0.$$

2. `Tempo finale` T `libero`. Se T non è specificato si ha $\delta T = 0$ e la condizione di trasversalità è la (2.136). Alcuni dei possibili sottocasi sono:

(a) `lo stato finale` x_T `è fissato`, $\delta x_T = 0$:

$$\left[H(t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right]_{t=T} = 0 \qquad \text{dove} \quad H(t) = H(x_t^*, u_t^*, \lambda_t^*, t);$$

se F_1 è assente il tutto si riduce a:

$$H(T) = 0;$$

(b) `lo stato finale` x_T `è libero`, $\delta x_T \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{t=T} \\ H_T &= - \left. \frac{\partial F_1}{\partial t} \right|_{t=T}; \end{aligned}$$

e, se F_1 è assente:

$$\lambda_t = H_T = 0.$$

(c) `lo stato finale` x_T `giace sulla varietà` $g[x_t, t] = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \frac{\partial R}{\partial x} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \\ H_T + \frac{\partial R}{\partial t} &= H_T + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \\ g(x_T, T) &= 0. \end{aligned}$$

In quest'ultimo caso si può anche scrivere:

$$g(x_T, T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} \delta x_T + \frac{\partial g}{\partial t} \delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta x_t = - \frac{\frac{\partial g}{\partial t} \delta t}{\frac{\partial g}{\partial x}} \ \text{se} \ \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0 \ ,$$

e quindi:

$$\left\{ \left[F(\cdot) - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \right\}_{t=T} = 0.$$

Bibliografia

[1] Arrow, K.J. and Kurz, M. (1969), *Optimal Consumer Allocation over an Infinite Horizon*, Journal of Economic Theory, 1, pp. 68-91.

[2] Bensoussan, A. (1988), *Perturbation Methods in Optimal Control*, John Wiley and Sons/Gauthiers- Villars Series, Chichester.

[3] Benveniste, L.M. and Scheinkman, J.A. (1982), *Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics the Continuous Time Case*, Journal of Economic Theory, 27, pp. 1-19.

[4] Blanchard, O.J. and Fisher, S. (1992), *Lezioni di Macroeconomia*, Societa' Editrice Il Mulino, Bologna.

[5] Castagnoli, E. and Peccati, L. (1979), *Matematica per l'Analisi Economica. Volume Primo. Algebra Lineare e Sistemi Dinamici*, Etas Libri, Milano.

[6] Castagnoli, E. and Peccati, L. (1979), *Matematica per l'Analisi Economica. Volume Secondo. Ottimizzazione Statica e Dinamica*, Etas Libri, Milano.

[7] Halkin, H. (1974), *Necessary conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons*, Econometrica, 42, pp. 267-272.

[8] Intriligator, M.D. (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[9] Michel, P. (1982), *On the Trasversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems*, Econometrica, 50 (4), pp. 975-985.

[10] Seierstad A. and Sydsæter (1977), *Sufficient Conditions in Optimal Control Theory*, International Economic Review, Vol. 18 (2), pp. 367-391.

[11] Seierstad A. and Sydsæter (1987), *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Advanced Textbooks in Economics, North-Holland, Amsterdam.

[12] Shell, K. (1969), *Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics. Lesson III*, Springer Verlag, Berlin.

[13] Tu, P.N.V. (1984), *Introductory Optimization Dynamics*, Springer Verlag, Berlin.